

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2018.01.004

一类奇异摄动 Neumann 问题变号解的计算与性质

谢资清^{1,2}, 袁永军^{1,2}

(1. 高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室, 湖南 长沙 410081;
2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院, 湖南 长沙 410081)

摘要: 采用改进型局部极小极大方法 (LMM) 计算一类奇异摄动半线性椭圆 Neumann 问题中的多种变号解。一方面, 按照 Morse 指标由低到高的顺序计算模型问题在不同非线性与不同区域情形下的变号解; 另一方面, 模拟模型问题的同一类变号解的能量与最大值随奇异摄动参数的变化规律。严格证明了变号解的最大值关于奇异摄动参数的非一致有界性, 及变号解的 Morse 指标在一定条件下大于等于 2 的结论。基于大量的数值试验, 提出一个关于同一类变号解能量和最大值的猜想。

关键词: 奇异摄动 Neumann 问题; 变号解; 奇异摄动参数; 局部极小极大方法

中图分类号: O175.25

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2018)01-0016-06

Computation and Properties of Sign-Changing Solutions for a Singularly Perturbed Neumann Problem

XIE Ziqing^{1,2}, YUAN Yongjun^{1,2}

(1. Key Laboratory of High Performance Computing and Stochastic Information Processing of National-Provincial Co-Construction, Ministry of Education, Changsha 410081, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: An improved local minimax method (LMM) has been adopted for the calculation of sign-changing solutions for a class of singularly perturbed Semilinear Elliptic Neumann problems. On the one hand, the variable sign-changing solutions of the model problem with different nonlinear terms and domains can be achieved in the ascending order of Morse indices. On the other hand, the energy and maximum value of the same class of variable number solution of the model problem are changing in line with the variation of the singular perturbation parameter. It can be strictly proved that the maximum value of the sign-changing solution is characterized with nonuniform boundedness with respect to the singularly perturbed parameter, with the Morse index of the sign-changing solution equal to or greater than 2 under certain conditions. Based on extensive numerical experiments, a conjecture has thus been proposed about the energy and maximum for the same kind of sign-changing solutions.

Keywords: singularly perturbed Neumann problem; sign-changing solution; singularly perturbed parameter; local minimax method

收稿日期: 2017-12-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (91430107, 11771138, 11171104, 11601148)

作者简介: 谢资清 (1966-), 女, 湖南长沙人, 湖南师范大学教授, 主要从事微分方程数值解方面的研究,
E-mail: ziqingxie@hunnu.edu.cn

通信作者: 袁永军 (1983-), 男, 湖南长沙人, 湖南师范大学讲师, 主要研究方向为微分方程数值解,
E-mail: yuanyongjun0301@163.com

1 研究背景

非线性微分方程的相关理论与计算已成为当前科学研究的热点之一。非线性微分方程通常没有凸性或正定性, 可能有多个解甚至无穷多个解(它们在物理上具有不同的能级), 其研究极其困难。特别是当有多个解时, 这些解具有什么样的性质和结构分布如何? 如何快速模拟出这些解? 这些都是十分棘手而又具有挑战性的问题。

本文将考虑一类带 Neumann 边界条件的奇异摄动半线性椭圆型方程

$$\begin{cases} \varepsilon \Delta u - u + f(u) = 0, & \text{in } \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是拉普拉斯算子;

- Ω 是 \mathbf{R}^N 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域;
 - ε 是奇异摄动参数, 且 $\varepsilon > 0$;
 - n 是边界 $\partial\Omega$ 上 x 点处的外法向。
- 函数 f 满足下面 4 条假定。

- H1) $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 。
- H2) 存在常数 $M > 0$, 使得当 $|u| \geq M$ 时,

$$|f(u)| \leq C_1 + C_2 |u|^p,$$

式中: C_1, C_2 为正常数;
 p 为常数, 且满足:

如果 $N \geq 3$, 则 $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$; 如果 $N=2$, 则

$1 < p < +\infty$ 。

- H3) 存在常数 $\mu > 0, M_1 > 0$, 使得当 $|u| \geq M_1$ 时,

$$0 < \mu F(u) \leq u f(u),$$

$$F(u) = \int_0^u f(t) dt.$$

- H4) $f(0) = 0$ 。

H4 蕴含方程 (1) 有平凡解 $u \equiv 0$; H3 表明当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $F(t)$ 超二次增长, $f(t)$ 超线性增长。易知方程 (1) 的能量泛函为

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega (\varepsilon |\nabla u|^2 + u^2) dx - \int_\Omega F(u) dx.$$

模型 (1) 被广泛应于生物数学^[1]、化学反应扩散过程模拟^[1]以及人口增长建模^[2-3]等方面。其解的存在性及多解性研究已有较多结果, 但这些研究大多数只关心模型问题的正解。例如, 当 ε 充分小时, Ni W. M. 等^[4]证明了最小能量解的存在性及相关性质。Wei J. C. 等^[5-7]证明了边界多峰解、内部单峰解以及

内部多峰解的存在性及性质。Lin C. S. 等^[8]证明了当 ε 充分大且 $f(u) = u^p$ 时, 存在 ε 的一个临界值, 使得当 ε 大于该临界值时, 模型方程 (1) 的正解只有平凡解; 而当 ε 小于该临界值时, 模型方程 (1) 至少有一个非平凡正解。随后, Xie Z. Q. 等^[9]证明了该临界值的确切值, 并将其推广到一般非线性情形。然而, 模型方程 (1) 往往存在变号解^[3,10], 这些变号解对应着物理化学中的激发态或能量跳跃过渡态, 对它们的研究也越来越引起人们的兴趣。

在模拟非线性微分方程的数值算法方面, 目前已有山路算法^[11]、高环绕算法^[12]、局部极小极大算法 (local minimax method, LMM)^[13]、搜索延拓法^[14]、分歧算法^[15]、最柔上升动力系统方法^[16]以及 Dimmer 方法^[17]等。

本文将改进型 LMM^[9]推广到计算模型问题 (1) 的变号解, 其基本思想是求解一个两层优化问题:

$$\min_{u \in S_H} \max_{v \in [L, u]} J(u),$$

即计算第一层上的约束最大化问题和第二层上的局部极小化问题。通过引入局部加密网格策略, 同时放松传统 LMM 对初始上升方向的严格正交性要求, 该算法可以按照 Morse 指标由低到高的顺序, 有效求解奇异摄动问题的多解 (鞍点)。

2 算法

本章具体介绍计算奇异摄动多解问题的局部极小极大方法。

2.1 相关定义

设 $L \subset H^1(\Omega) := H$ 为一给定的闭子空间, 令

$$S_H = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\| = 1\},$$

$$[L, v] = \{tv + w | w \in L, t \geq 0\}, \quad v \in S_H,$$

给出如下 2 个定义。

定义 1 设 $P: S_H \rightarrow 2^H$ 满足

$$P(v) := \left\{ v^* \mid v^* := \arg \max_{u \in [L, v]} I_\varepsilon(u) \right\}, \quad \forall v \in S_H,$$

则称 $P(v)$ 为基于 L 的 (集值) 峰映射。如果单值映射 $p: S_H \rightarrow H$ 满足

$$p(v) \in P(v), \quad \forall v \in S_H,$$

则称 $p: S_H \rightarrow H$ 为基于 L 的一个峰选择。对于给定的 $v \in S_H$, 如果存在 v 的邻域 $N(v)$ 和一个泛函 $p: N(v) \cap S_H \rightarrow H$ 使得

$$p(u) \in P(u), \quad \forall u \in N(v) \cap S_H,$$

则称 I_ε 在 v 处存在一个基于 L 的局部峰选择。

定义2 设 u^* 为 I_ε 的临界点, 即 $I'_\varepsilon(u^*)=0$, 令 $H = H^- \oplus H^0 \oplus H^+$, 其中 H^- 、 H^0 、 H^+ 分别为线性算子 $I''_\varepsilon(u^*)$ 在 L^2 内积意义下正交谱分解的负定子空间、核空间及正定子空间, 且 $\dim(H^0) < +\infty$, 则 u^* 的 Morse 指标定义为

$$M_i(u^*) = \dim(H^-).$$

如果 $H^0 = \{0\}$, 称 u^* 为非退化的, 否则称 u^* 为退化的, 且 $\dim(H^0)$ 为其零度。

下面给出求解奇异摄动 Neumann 问题多解的改进型 LMM 算法^[9]。

2.2 局部加密网格的改进型 LMM 算法

局部加密网格的改进型 LMM 算法的具体步骤如下:

步骤1 生成区域 Ω 的一个网格。

步骤2 给定 $\delta_1 > 0$, $\lambda > 0$ 以及 $n-1$ 个已经算好的 I_ε 的临界点 w_1, w_2, \dots, w_{n-1} , 取支集 $L = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$, 其中 w_{n-1} 为 L 中具有最高 M_i 或能量的临界点; 选择一个 w_{n-1} 处的初始上升方向 $v^0 = v^0_\perp + v^0_L \in S_H$, 且 $0 \neq v^0_\perp \in L^\perp$, $v^0_L \in L$; 令 $k_0=50$, $t^0_0=1$, $u^0_L=w_{n-1}$ 以及 $k=0$ 。

步骤3 以 $w^k = t^k_0 v^k + u^k_L$ 为初值, 求解

$$w^k = p(v^k) \equiv \arg \max_{u \in [L, v^k]} I_\varepsilon(u),$$

仍记 $w^k = p(v^k) = t^k_0 v^k + u^k_L$ 。

步骤4 计算 I_ε 在 w^k 处的最速下降方向 d^k 。

步骤5 如果 $\|d^k\|_1 \leq \delta_1$, 输出 $w_n = w^k$, 停止计算; 如果 $\|d^k\|_1 > \delta_1$ 且 $k < k_0$, 转步骤6; 如果 $\|d^k\|_1 > \delta_1$, 且 $k \geq k_0$, 令 $w_n^0 = w^k$ 转步骤8。

步骤6 令 $v^k(s) = \frac{v^k + s d^k}{\|v^k + s d^k\|_1}$, 并计算

$$s^k = \max \left\{ \frac{\lambda}{2^m} \left| I_\varepsilon \left(p \left(v^k \left(\frac{\lambda}{2^m} \right) \right) \right) - I_\varepsilon(w^k) \right| \leq -\frac{t^k_0}{2} \|d^k\|_1 \left\| v^k \left(\frac{\lambda}{2^m} \right) - v^k \right\|_1 \right\};$$

初值 $u = t^k_0 v^k \left(\frac{\lambda}{2^m} \right) + u^k_L$ 用来求解 I_ε 在 $\left[L, v^k \left(\frac{\lambda}{2^m} \right) \right]$ 中的局部极大 $p \left(v^k \left(\frac{\lambda}{2^m} \right) \right)$, 其中 t^k_0 和 u^k_L 取自步骤3, 以保证算法的稳定性。

步骤7 令 $v^{k+1} = v^k(s) + u^k_L$, $w^{k+1} = p(v^{k+1})$, $k=k+1$, 转步骤4。

步骤8 根据 w_n^0 的峰所在子区域进行局部加密, 转步骤2。

由于初始上升方向中 $0 \neq v^0_\perp \in L^\perp$, 由上述算法计算的解一定为新解。此外, 该新解 w_n 的 Morse 指标为 $M_i(w_n) = \dim(L) + 1$ 。

3 数值实验

本章计算矩形区域上具有不同峰的变号解, 不同区域上的两峰变号解, 以及不同奇异摄动参数 ε 和不同非线性项对应的变号解。因此, 数值模拟实验设计如下:

Case 1 取 $\varepsilon=10^{-3}$, $\Omega=(-1, 1)^2$, $f(u)=u^3$, 计算两峰、三峰、四峰解;

Case 2 取 $\varepsilon=10^{-3}$, $f(u)=u^3$, 依次计算矩形域、圆域、哑铃型区域上两峰变号解;

Case 3 取 $\Omega=(-1, 1)^2$, $f(u)=u^3$, 依次计算 $\varepsilon=10^6, 10^4, 10^2, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$ 对应的两峰变号解, 相应解的能量与最大值;

Case 4 取 $\Omega=(-1, 1)^2$, $f(u)=u^7$, $f(u)=u(u-1)\left(u-\frac{1}{4}\right)$,

分别计算两峰变号解, 重复 Case 3。

把随 ε 连续变化的具有相同数量的峰, 且峰的位置也相同的变号解, 称为同一类变号解。设 E_i 和 M_i 分别表示同一类变号解对应 $\varepsilon=\varepsilon_i$ 时的能量和最大值, 定义同一类变号解的能量及最大值随 ε 的增长阶为

$$r_E = \frac{\lg(E_2/E_1)}{\lg(\varepsilon_2/\varepsilon_1)},$$

$$r_M = \frac{\lg(M_2/M_1)}{\lg(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}.$$

数值模拟结果表明, 对任意奇异摄动参数 ε , 模型方程 (1) 在各种区域上具有变号解。

图 1~2 分别为正方形区域上的两峰和四峰变号解, 它们的峰位于边界平均曲率最大处。

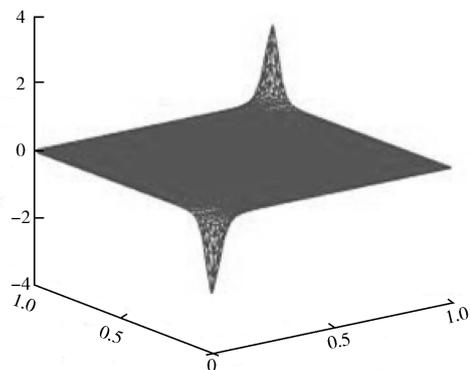


图1 Case 1 中的两峰变号解

Fig. 1 A two-peak sign-changing solution in Case 1

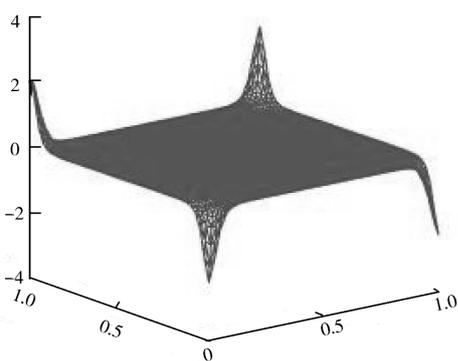


图 2 Case 1 中的四峰变号解

Fig. 2 A four-peak sign-changing solution in Case 1

图 3~4 分别为单位圆和哑铃型区域上的两峰变号解, 它们的峰位于边界圆弧上。

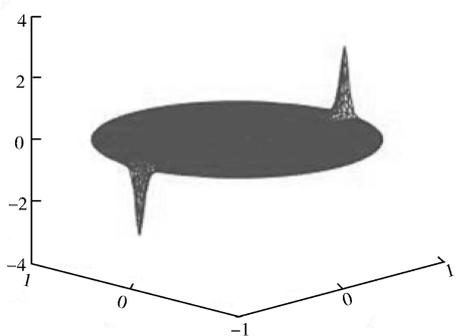


图 3 Case 2 中单位圆上的两峰变号解

Fig. 3 A two-peak sign-changing solution for the unit circle in Case 2

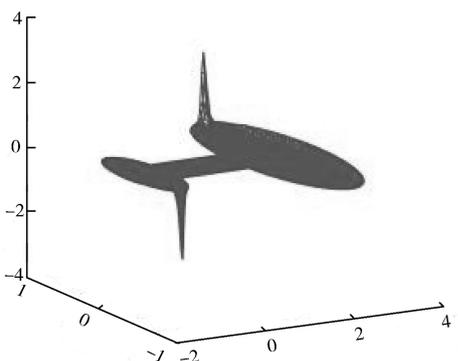


图 4 Case 2 中哑铃型区域上的两峰变号解

Fig. 4 A two-peak sign-changing solution for the dumbbell domain in Case 2

图 5~8 分别为 ε 取不同值时的两峰变号解。从图 5~8 可以看出, 同一种类型或同一分支的变号解的峰随着 ε 的变化出现两种情形: 当 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 时, 变号解的峰越来越高, 没有一致上界; 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 变号解的峰越来越陡, 且越来越尖。解的最大值对 ε 具有一致上界。

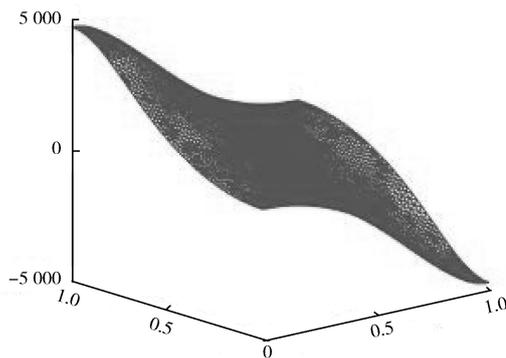


图 5 Case 3 中 $\varepsilon=10^6$ 对应的两峰变号解

Fig. 5 A two-peak sign-changing solution with $\varepsilon=10^6$ in Case 3

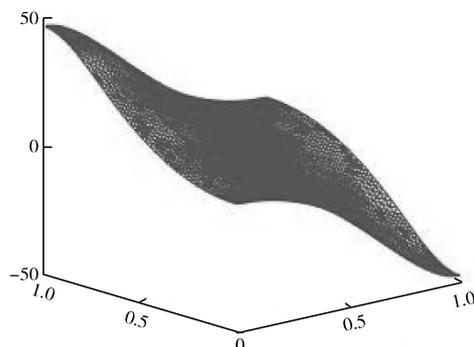


图 6 Case 3 中 $\varepsilon=10^2$ 对应的两峰变号解

Fig. 6 A two-peak sign-changing solution with $\varepsilon=10^2$ in Case 3

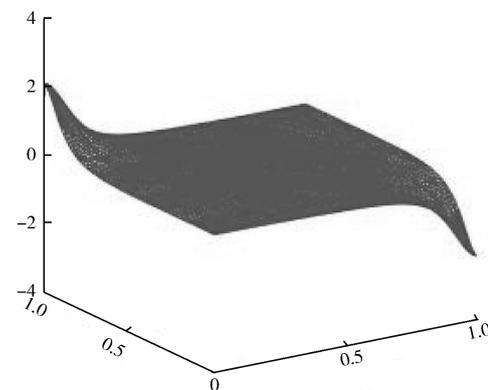


图 7 Case 3 中 $\varepsilon=10^{-2}$ 对应的两峰变号解

Fig. 7 A two-peak sign-changing solution with $\varepsilon=10^{-2}$ in Case 3

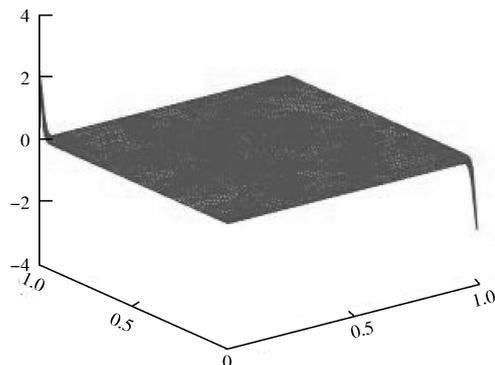


图 8 Case 3 中 $\varepsilon=10^{-4}$ 对应的两峰变号解

Fig. 8 A two-peak sign-changing solution with $\varepsilon=10^{-4}$ in Case 3

图 9~10 分别为不同非线性项对应的两峰解。由图 9~10 可知, 当非线性项 $f(u)$ 为奇函数时, 变号解的最大值和最小值的绝对值几乎相等; 而当 $f(u)$ 不为奇函数时, 变号解的最大值和最小值的绝对值明显不相等。

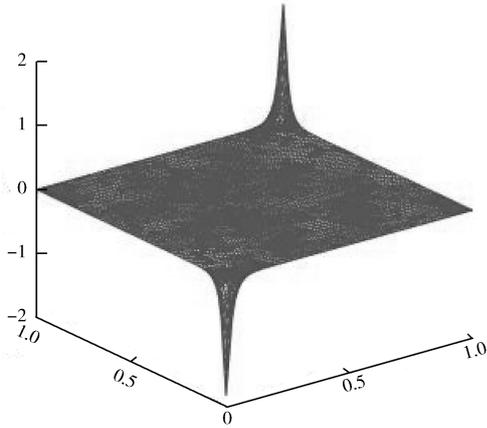


图 9 Case 4 中 $f(u)=u^7$ 对应的两峰变号解

Fig. 9 A two-peak sign-changing solution with $f(u)=u^7$ in Case 4

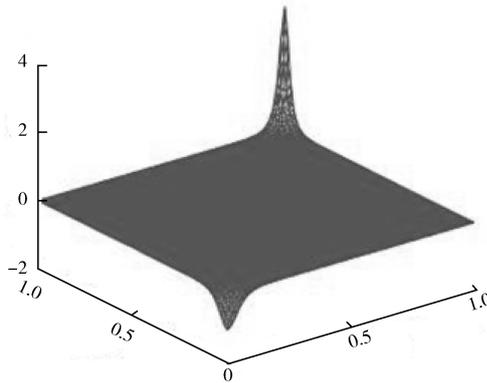


图 10 Case 4 中 $f(u)=u(u-1)(u-1/4)$ 对应的两峰变号解

Fig. 10 A two-peak sign-changing solution with $f(u)=u(u-1)(u-1/4)$ in Case 4

非线性项 $f(u)$ 不同时, 同一类变号解的能量 E 与最大值 M 随 ε 的变化结果如表 1 所示。

表 1 变号解的 E, M, r_E, r_M 随 ε 的变化

Table 1 Corresponding changes of E, M, r_E, r_M of sign-changing solutions with ε

$f(u)$	ε	E	M	r_E	r_M
u^3	10^2	9.44×10^4	148.157 0	1.999 1	0.499 8
	10^4	9.40×10^8	468.295 0	2.000 0	0.500 2
	10^6	9.44×10^{12}	4 680.000 0		
u^7	10^2	9.41×10^2	4.777 5	1.333 0	0.166 5
	10^4	4.36×10^5	10.289 6	1.333 3	0.166 7
	10^6	2.02×10^8	22.168 3		
$u(u-1)(u-1/4)$	10^2	9.47×10^4	47.278 3	1.999 1	0.497 2
	10^4	9.44×10^8	468.860 0	2.000 0	0.499 9
	10^6	9.44×10^{12}	4 680.000 0		

由表可知, 当 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 时, 同一类变号解的能量与最大值随 ε 的增长呈现一定的规律, 即 $r_E = \frac{p+1}{p-1}$, $r_M = \frac{1}{p-1}$, 其中 p 为 H2 中多项式的阶数。

4 理论分析

本章讨论变号解的有界性, Morse 指标及能量随 ε 的变化规律。

定理 1 设 u 是模型方程 (1) 的变号解, 那么对于充分大的 ε , 不存在独立于 u 和 ε 的常数 $C > 0$, 使得

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C \tag{2}$$

对一切变号解 u 恒成立。

证明 采用反证法。设存在独立于 u 和 ε 的常数 $C > 0$, 使得式 (2) 对一切变号解一致成立。令 u 是 ε 充分大时的任一变号解, 它可分解为 $u = u_0 + \phi$, 其中

$$u_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx, \int_{\Omega} \phi(x) dx = 0,$$

$|\Omega|$ 为区域 Ω 的测度。

由模型方程 (1) 可得

$$\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \int_{\Omega} \phi^2 dx = \int_{\Omega} \phi^2 \left(\int_0^1 f'(u_0 + t\phi) dt \right) dx. \tag{3}$$

根据反设条件, 对于任意的 $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$ 有 $|u_0 + t\phi| \leq C$ 。又因 $f \in C^1$, 所以当 ε 充分大时, 例如当 $\varepsilon > 1$ 时, $|f'(u_0 + t\phi)| \leq C_1$ 在 $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ 上一致成立, 其中 C_1 是独立于 u 和 ε 的常数。

根据 Poincare 不等式, 对于 $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$, 如果有 $\int_{\Omega} \phi dx = 0$, 则

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \geq c_0 \int_{\Omega} \phi^2 dx,$$

故由式 (3) 得

$$(1 + c_0 \varepsilon) \int_{\Omega} \phi^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} \phi^2 dx.$$

因此, 当 $\varepsilon > \max \left\{ 1, \frac{C_1 - 1}{c_0} \right\}$ 时, $\phi = 0$, 即 u 是一个常量函数。

矛盾! 命题得证。

注 定理 1 表明, 当 ε 充分大时, 随着 ε 的增大,

同一类变号解的最大值会越来越大。事实上, 根据数值模拟结果, 可给出如下猜想:

猜想 1 当 ε 充分大时, 模型方程 (1) 的同一类变号解 u 的能量和最大值分别为

$$I_\varepsilon(u) = O\left(\varepsilon^{\frac{p+1}{p-1}}\right),$$

$$\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\right).$$

最后, 给出一个关于变号解的 Morse 指标的结论。

定理 2 如果 $f'(x)x^2 > f(x)x$ 对任意 $x \neq 0$ 恒成立, 则模型问题 (1) 的任意变号解 u 的 Morse 指标 $M_i(u) \geq 2$ 。

证明 设 $u = u^+ + u^-$ 是模型方程 (1) 的任意变号解, 其中 $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$, $u^+ \neq 0$, $u^- \neq 0$, 那么 $u^+(x)u^-(x) = 0, \forall x \in \Omega$, 且任意 $v \in H_i$ 满足

$$I'_\varepsilon(u)v = \int_\Omega (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v + uv - f(u)v) dx = 0.$$

特别地, 当 $v = u^+$ 或 $v = u^-$ 时, 因为

$$f(u)u^+ = f(u^+)u^+$$

以及

$$f(u)u^- = f(u^-)u^-, \quad \forall x \in \Omega,$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla u^+ + uu^+ - f(u)u^+) dx = \\ &= \int_\Omega (\varepsilon |\nabla u^+|^2 + |u^+|^2 - f(u^+)u^+) dx = \\ &= I'_\varepsilon(u^+)u^+. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla u^- + uu^- - f(u)u^-) dx = \\ &= \int_\Omega (\varepsilon |\nabla u^-|^2 + |u^-|^2 - f(u^-)u^-) dx = \\ &= I'_\varepsilon(u^-)u^-. \end{aligned}$$

令 $u(t) = u^+ + tu^-$, $t > 0$, 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} I_\varepsilon(u(t)) &= \langle I''_\varepsilon(u)u^-, u^- \rangle = \\ &= \langle I''_\varepsilon(u^-)u^-, u^- \rangle = \\ &= \int_\Omega \left[\varepsilon |\nabla u^-|^2 + |u^-|^2 - f'(u^-)(u^-)^2 \right] dx < \\ &= I''_\varepsilon(u^-)u^- < 0. \end{aligned}$$

同理, 令 $u(t) = tu^+ + u^-$, $t > 0$, 可得

$$\langle I''_\varepsilon(u)u^+, u^+ \rangle < 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \langle I''_\varepsilon(u)u^+, u^- \rangle &= \\ &= \int_\Omega \left[\varepsilon \nabla u^+ \cdot \nabla u^- + u^+u^- - f'(u)u^+u^- \right] dx = 0. \end{aligned}$$

综上所述, 根据文献 [9] 中引理 3.1 知, 定理 2 得证。

5 结论

本文计算了一类奇异摄动 Neumann 问题在不同区域中对应不同奇异摄动参数 ε 的变号解, 同时讨论了变号解的若干性质, 可得如下结论:

1) 在不同区域中, 对任意 ε , 模型方程 (1) 存在变号解;

2) 当 ε 充分大时, 同一类变号解的能量和最大值随 ε 的增长阶分别为

$$r_E = \frac{p+1}{p-1}, \quad r_M = \frac{1}{p-1};$$

3) 如果 $f'(x)x^2 > f(x)x$ 对任意 $x \neq 0$ 恒成立, 那么模型问题 (1) 的任意变号解 u 的 Morse 指标 $M_i(u) \geq 2$ 。

参考文献:

- [1] GIERER A, MEINHARDT H. A Theory of Biological Pattern Formation[J]. Kybemetik, 1972, 12(1): 30-39.
- [2] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Multidimensional Nonlinear Diffusion Arising in Population Genetics[J]. Advances in Mathematics, 1978, 30(1): 33-76.
- [3] SMOLLER J, WASSERMAN A. Global Bifurcation of Steady-State Solutions[J]. Journal of Differential Equations, 1981, 39(2): 269-290.
- [4] NI W M, TAKAGI I. Locating the Peaks of Least-Energy Solutions to a Semilinear Neumann Problem[J]. Duke Mathematical Journal, 1993, 70(2): 247-281.
- [5] WEI J C, WINTER M. Multi-Peak Solutions for a Wide Class of Singularly Perturbation Problems[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1999, 59(2) 585-606.
- [6] LIN F H, NI W M, WEI J C. On the Number of Interior Peak Solutions for a Singularly Perturbed Neumann Problem[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 60(2): 252-281.
- [7] CAO D M, KUPPER T. On the Existence of Multi-peaked Solutions to a Semilinear Neumann Problem[J]. Duke Mathematical Journal, 1999, 97(2): 261-300.

(下转第 28 页)