doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2018.01.003

一个新的计数公式及其应用

高普云

（国防科技大学 空天科学学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：将几个著名数论问题转化为计算2个有限集合交集元素的个数。对于给定整数集的2个有限子集，建立了一个计算他们交集元素个数的公式。作为该公式的一个应用例子，给出了Goldbach猜想的一个等价命题。

关键词：有限集；交集；计数公式；Goldbach猜想；等价命题

中图分类号：O156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2018)01-0011-05

A Newly-Proposed Counting Formula and Its Application

GAO Puyun

（School of Aerospace Science，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：This paper tentatively converts several famous number theory problems to the number of two finite set intersection elements. Given two finite subsets of the set of integer numbers, a counting formula has been proposed for the calculation of the number of elements of their intersection. Consequently, an equivalent proposition of Goldbach's conjecture has been provided as an illustration of the formula.

Keywords：finite set；intersection of two sets；counting formula；Goldbach’s conjecture；an equivalent proposition

1　研究背景

有一些数学问题，用现有的方法已无法解决。例如，用圆法已解决不了Goldbach猜想[1-5]。因为陈景润已将其中2个起决定作用函数的值估计达到了最优[6]。因此，在逻辑上没有证明这类问题不可解之前，换一种思想或方法去考虑，也许能找到解决他们的途径。

先从几个经典的例子开始，换一种思路来研究这类问题。

问题1（Goldbach猜想）　大于4的任何偶数都可以表示成2个奇素数之和[7]。

该问题可以表述为，若设n是任一大于4的偶数，那么不定方程

$$p_\alpha+p_\beta=n \tag{1}$$

有解，其中p_α，p_β是2个奇素数。

方程（1）等价于

$$p_\beta=n-p_\alpha。 \tag{2}$$

设K是小于n的所有素数的个数（即$K=\pi(n)$），$p_1, p_2, \cdots, p_K$是所有小于或等于n的素数，则可构造2个集合

$$A_G=\{p_1, p_2, \cdots, p_K\},$$

$$B_G=\{n-p_1, n-p_2, \cdots, n-p_K\}。$$

显然，方程（2）有解的充分必要条件是$A_G\cap B_G$非空，并且解的个数正好是交集$A_G\cap B_G$的元素的个数。

收稿日期：2017-10-19

作者简介：高普云（1962-），男，湖南攸县人，国防科技大学教授，博士生导师，主要从事动力学与控制方面的教学与研究，E-mail：gfkdgpy@hotmail.com

问题 2 对于任意正整数 n，计算小于或等于 $n+2$ 的孪生素数的个数[7]。

构造 2 个集合

$$A_{\mathrm{T}}=\{p_2, p_3, \cdots, p_K\},$$

$$B_{\mathrm{T}}=\{p_2+2, p_3+2, \cdots, p_K+2\},$$

其中 $p_2, p_3, \cdots, p_K$ 是素数。

计算小于或等于 $n+2$ 孪生素数的个数，就是要计算满足条件

$$p_{j+1}=p_j+2$$

的下标 j 的个数，其中 $j\leqslant K=\pi(n)$。这种下标的个数就是交集 $A_{\mathrm{T}}\cap B_{\mathrm{T}}$ 的元素的个数。

问题 3 对于正整数 n，计算小于或等于 2^n-1 的形如 2^p-1（p 是小于或等于 n 的奇素数）的素数的个数[7]。

构造 2 个集合

$$A_{\mathrm{M}}=\{2, 2^2, \cdots, 2^K\},$$

$$B_{\mathrm{M}}=\{p_2+1, p_3+1, \cdots, p_K+1\},$$

其中 $p_2, p_3, \cdots, p_K$ 是素数，$K=\pi(n)$。

小于或等于 2^n-1 的形如 2^p-1 的素数的个数，就是交集 $A_{\mathrm{M}}\cap B_{\mathrm{M}}$ 的元素的个数。

问题 4 对于正整数 n，计算小于或等于 $2^{2^n}+1$ 的形如 $2^{2^j}+1$（$j\leqslant n$）的素数的个数[7]。

构造 2 个集合

$$A_{\mathrm{F}}=\{2^{2^0}, 2^{2^1}, \cdots, 2^{2^n}\},$$

$$B_{\mathrm{F}}=\{p_2-1, p_3-1, \cdots, p_K-1\},$$

其中 $p_2, p_3, \cdots, p_K$ 是素数，$K=\pi(n)$。

小于或等于 $2^{2^n}+1$ 的形如 $2^{2^j}+1$ 的素数的个数，就是交集 $A_{\mathrm{F}}\cap B_{\mathrm{F}}$ 的元素的个数。

问题 5 对于给定的正整数 n 和 l，计算不定方程 $x^l+y^l=n$ 正整数解的个数[7]。

构造 2 个集合

$$A_{\mathrm{D}}=\{1^l, 2^l, \cdots, H^l\},$$

$$B_{\mathrm{D}}=\{n-1^l, n-2^l, \cdots, n-H^l\},$$

其中 $H=\left[\sqrt[l]{n}\right]$。

不定方程 $x^l+y^l=n$ 正整数解的个数，就是交集 $A_{\mathrm{D}}\cap B_{\mathrm{D}}$ 的元素的个数。

问题 6 对于任意的正整数 n，计算小于或等于 n 的形如 a^2+1 的素数的个数[7]。

构造 2 个集合

$$A_{\mathrm{S}}=\{1^2, 2^2, \cdots, H^2\},$$

$$B_{\mathrm{S}}=\{p_1-1, p_2-1, \cdots, p_K-1\},$$

其中：$p_1, p_2, \cdots, p_K$ 是素数；$H=\left[\sqrt{n-1}\right]$。

小于或等于 n 的形如 a^2+1 的素数的个数，就是交集 $A_{\mathrm{S}}\cap B_{\mathrm{S}}$ 的元素的个数。

上述 6 个问题都可归纳为计算 2 个有限集合的交集的元素个数。由于集合的元素是用符号表示的，而不是具体的数字，不能简单地数一数就可以计算出交集元素的个数。由此可提出一个问题：是否可以用这 2 个有限集合的元素来确定他们的交集元素的个数？为此，下文将推出这样一个计算公式。

2 一个新的计算公式

为了方便，先回顾一些关于初等对称多项式的知识，然后推出一个递推关系。

2.1 初等对称多项式

一个 n 次多项式

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n), \tag{3}$$

用初等对称多项式可表示为

$$f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n, \tag{4}$$

其中 $\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是初等对称多项式，其定义为

$$\sigma_i=\sigma_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_i\leqslant n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i}。\tag{5}$$

记

$$\sigma_{i,r}(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sigma_i(x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}, x_{r+1}, \cdots, x_n), \tag{6}$$

则式（5）可表示为

$$\sigma_i=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_i\leqslant n\\ j_l\neq r,\ 1\leqslant l\leqslant i}}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i}+x_r\sum_{\substack{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{i-1}\leqslant n\\ j_l\neq r,\ 1\leqslant l\leqslant i-1}}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_{i-1}}。$$

根据式（6），上式可写为

$$\sigma_i=\sigma_{i,r}+x_r\sigma_{i,r-1}。\tag{7}$$

由此可得递推关系式

$$\sigma_{i,r}=\sigma_i-x_r\sigma_{i-1}+\cdots+(-1)^ix_r^i\sigma_0, \tag{8}$$

其中 $\sigma_0=1$。

设 M 和 N（$M<N$）是 2 个整数，定义

$$\sigma_i(M, N)=\sigma(M, M+1, \cdots, N),$$

$$\sigma_{i,r}(M, N)=\sigma(M, M+1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, N)。$$

特别地，有

$$\sigma_i(1, n)=\sigma_i(1, 2, \cdots, n)=s(n+1, n+1-i),$$

其中 $s(n+1, n+1-i)$ 是第一类 Stirling 数。

为了方便，记

$$\sigma_i(n)=\sigma_i(1, n)\ (i=0, 1, 2, \cdots, n)。$$

2.2 特殊的 Lagrange 系数多项式

Lagrange 系数多项式常用来逼近连续函数[8]。先构造一种特殊的 Lagrange 系数多项式，再利用他们构造本文所需要的计数公式。

设 M 和 N（$M<N$）是 2 个整数，那么以 $N-M+1$ 点：$M, M+1, M+2, \cdots, N-1, N$ 为基点的 Lagrange 系数多

项式是

$$L_j(x)=\frac{(x-M)\cdots(x-j-1)(x-j+1)\cdots(x-N)}{(j-M)\cdots(j-j-1)(j-j+1)\cdots(j-N)},\quad(9)$$

其中 $j=M, M+1, \cdots, N$。

引理 1　对于任意满足条件 $M\leqslant i\leqslant N$ 的整数 i，则有

$$L_j(i)=\begin{cases}1,\ i=j;\\0,\ i\neq j。\end{cases}$$

引理 1 的证明参见文献 [8]。

直接计算式（9）的分母得

$$(j-M)\cdots(j-j-1)(j-j+1)\cdots(j-N)=(-1)^{N-j}(j-M)!(N-j)!。$$

利用式（3）、式（4）和上式可得

$$L_j(x)=\frac{(-1)^{N+j}}{(j-M)!(N-j)!}\sum_{i=0}^{N-M}(-1)^i\sigma_{i,j}(M,N)x^{N-M-i},\quad(10)$$

其中 $i=1, 2, \cdots, N-M$，$j=M, M+1, \cdots, N$。

利用递推关系式（8），式（10）可写为

$$L_j(x)=\frac{(-1)^{N+j}}{(j-M)!(N-j)!}\times\sum_{i=0}^{N-M}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\sigma_k(M,N)j^{i-k}x^{N-M-i}。\quad(11)$$

2.3　推导计数公式

考虑整数集的 2 个有限子集

$$A=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{K_1}\},\ B=\{j_1, j_2,\ \cdots, j_{K_2}\},$$

其中 K_1, K_2 是 2 个正整数。记

$$M_0=\min\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{K_1};\ j_1, j_2,\ \cdots, j_{K_2}\},$$

$$N_0=\max\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{K_1};\ j_1, j_2,\ \cdots, j_{K_2}\}。$$

任取 $M\leqslant M_0$ 及 $N\geqslant N_0$，定义集合

$$\Gamma=\{M, M+1, \cdots, N-1, N\}。$$

显然，$A\subset\Gamma$，$B\subset\Gamma$，即 A 和 B 都是 Γ 的子集。

构造多项式

$$G(x)=\sum_{k=1}^{K_1}L_{i_k}(x)。\quad(12)$$

式（12）是过 K_1 个点 $(i_1, 1), (i_2, 1), \cdots, (i_{K_1}, 1)$，且次数至多为 $N-M$ 次的多项式。这个多项式是不同于过 $N-M+1$ 个点 $(M, 1), (M+1, 1), \cdots, (N, 1)$ 的多项式 $\sum_{k=M}^{N}L_k(x)$，除非在 $A=B$ 的情况。

引理 1 表明下面的引理 2 成立。

引理 2　设 $q\in\Gamma$，那么 $q\in A$ 当且仅当

$$G(q)=\sum_{k=1}^{K_1}L_{i_k}(q)=1。$$

利用引理 2，可得 A 与 B 交集元素个数的计算公式为

$$\chi(A,B)=\sum_{h=1}^{K_2}G(j_h)=\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=1}^{K_1}L_{i_k}(j_h)。$$

根据式（11），上式可写为

$$\chi(A,B)=\sum_{k=1}^{K_1}\frac{(-1)^{N+i_k}}{(i_k-M)!(N-i_k)!}\times\sum_{l=0}^{N-M}\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\sigma_m(M,N)i_k^{\,l-m}\left(\sum_{h=1}^{K_2}j_h^{\,N-M-l}\right)。\quad(13)$$

采用式（13）计算交集元素个数，有时会十分复杂，但对于存在性的问题，只须证明 $\chi(A, B)>0$ 即可。定义：

$$\bar{L}_j(x)=(j-M)!(N-j)!L_j(x),$$

$$\Omega(A,B)=\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=1}^{K_1}\bar{L}_{i_k}(j_h)。$$

通过直接计算得

$$\Omega(A,B)=\sum_{l=0}^{N-M}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{N+m}\sigma_m(M,N)\left(\sum_{k=1}^{K_1}(-1)^{i_k}i_k^{\,l-m}\right)\left(\sum_{h=1}^{K_2}j_h^{\,N-M-l}\right)。\quad(14)$$

因此，$A\cap B$ 非空的充分必要条件是 $\chi(A, B)>0$。由引理 1 可直接推出下面的定理 1。

定理 1　$\chi(A, B)>0$，当且仅当 $\Omega(A, B)>0$。

显然，式（14）比式（13）简单，对于存在性问题的证明，用式（14）更方便。

设 $C=\Gamma-A=\{l_1, l_2, \cdots, l_R\}(R=N-M+1-K_1)$，通过直接计算，式（13）可化为

$$\chi(A,B)=\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{h=1}^{K_2}\frac{(-1)^{N+i_k}\alpha(j_h)\beta'(j_h)}{(i_k-M)!(N-i_k)!},\quad(15)$$

其中 $\alpha(x)=\prod_{m=1}^{R}(x-l_m)$，$\beta(x)=\prod_{k=1}^{K_1}(x-i_k)$，$\beta'(x)$ 是 $\beta(x)$ 的一阶导数。

展开上面 2 个多项式得

$$\alpha(x)=x^R-\sigma_1^{\alpha}x^{R-1}+\cdots+(-1)^R\sigma_R^{\alpha},$$

$$\beta(x)=x^{K_1}-\sigma_1^{\beta}x^{K_1-1}+\cdots+(-1)^{K_1}\sigma_{K_1}^{\beta},$$

其中 $\sigma_i^{\alpha}=\sigma(l_1, l_2, \cdots, l_R)$，$\sigma_j^{\beta}=\sigma(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{K_1})$。

通过计算易得

$$\alpha(x)\beta'(x)=\sum_{i=0}^{R+K_1-1}(-1)^{R+K_1-1-i}A_{R+K_1-1-i}x^i,$$

$$\text{其中}A_k=\begin{cases}\sum_{l=1}^{k}(K_1-k)\sigma_l^{\beta}\sigma_{k-l}^{\alpha},\ k\leqslant K_1-1;\\\sum_{l=1}^{K_1-1}(K_1-k)\sigma_l^{\beta}\sigma_{k-l}^{\alpha},\ K_1\leqslant k\leqslant R;\\\sum_{l=k-R}^{K_1-1}(K_1-k)\sigma_l^{\beta}\sigma_{k-l}^{\alpha},\ R<k\leqslant R+K_1-1。\end{cases}$$

同理，可得

$$\Omega\left(A,B\right)=\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{h=1}^{K_2}\left(-1\right)^{N+i_k}\alpha\left(j_h\right)\beta'\left(j_h\right)。\quad（16）$$

3 Goldbach 猜想的 1 个等价命题

对问题 1，可取 $M=1$ 和 $N=n$，且 $K_1=K_2=K=\pi(n)$。由式（14）得

$$\Omega\left(A_{\mathrm{G}},B_{\mathrm{G}}\right)=$$
$$-\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{l}\left(-1\right)^{m}\sigma\left(n\right)\left(\sum_{k=1}^{K}p_k^{l-m}\right)\left(\sum_{k=1}^{K}\left(n-p_k\right)^{n-1-l}\right)。$$

若记 $T_i=\sum_{k=1}^{K}p_k{}^{i}\left(i=0,1,\cdots,n-1\right)$，利用二项式定理，通过直接计算得

$$\Omega\left(A_{\mathrm{G}},B_{\mathrm{G}}\right)=-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}\left(n\right)T_iT_j\ ,\quad（17）$$

其中：

$$a_{ij}(n)=a_{ji}(n)=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^i}{i!}h_{n-1-i}^{(i)}\left(n\right)+\frac{(-1)^j}{j!}h_{n-1-j}^{(j)}\left(n\right)\right];$$

$$h_k(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_i\left(n\right)x^{k-i}\ \left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\right)。$$

同理，应用式（16）可得

$$\Omega\left(A,\ B\right)=\left(-1\right)^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{h=1}^{K}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-1\right)^{n-i}A_{n-1-i}\left(n-p_h\right)^{i}\ ,（18）$$

其中

$$A_k=\begin{cases}\sum_{l=1}^{k}\left(K-k\right)\sigma_l^{\beta}\sigma_{k-l}^{\alpha},\ k\leqslant K-1;\\ \sum_{l=1}^{K-1}\left(K-k\right)\sigma_l^{\beta}\sigma_{k-l}^{\alpha},\ K\leqslant k\leqslant R;\\ \sum_{l=k-R}^{K-1}\left(K-k\right)\sigma_l^{\beta}\sigma_{k-l}^{\alpha},\ R<k\leqslant n-1。\end{cases}$$

且 $\sigma_l^{\beta}=\left(p_1,p_2,\cdots p_K\right)$。

定理 2 设 n 是一个大于 4 的整数，n 可以表示为 2 个奇素数之和，当且仅当 $\Omega(A_{\mathrm{G}}, B_{\mathrm{G}})>0$。

式（17）是关于 $T_0=n, T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ 的二次型，其系数矩阵的元素完全由第一类 Stirling 数决定。如果能求出该系数矩阵的特征根和特征向量，就可判断是否可用式（17）解决 Goldbach 猜想。

式（18）是关于 $T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ 的一次表示，根据 Waring 公式，$T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ 可由 $\sigma_1^{\beta}, \sigma_2^{\beta}, \cdots, \sigma_{K_1}^{\beta}$ 表示 [9]。接下来的问题是怎样简化该表示，使其可用于研究 Goldbach 猜想。当然，也可以直接用牛顿公式化简式（18）[9]。

4 结论

本文给出了 Goldbach 猜想的一个等价命题（定理 2）。圆法不能解决 Goldbach 猜想，陈景润也认为可用哲学观点去研究这一问题 [10]。在这种情况下，本文的方法具有一定的意义。对于其他几个问题，必须对公式（13）的右边进行适当地估计。然而，这种估计密切依赖于化简式（17）或式（18）。显然式（13）可以写为

$$\chi\left(A,B\right)=\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=1}^{K_1}L_{i_k}\left(j_h\right)=$$
$$\sum_{h=1}^{K_2}\frac{1}{\left(i_k-M\right)!\left(N-i_k\right)!}\sum_{k=1}^{K_1}\bar{L}_{i_k}\left(j_h\right)=$$
$$\frac{1}{\left(i_1-M\right)!\left(N-i_1\right)!}\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=1}^{K_1}\bar{L}_{i_k}\left(j_h\right)+$$
$$\left(\frac{1}{\left(i_2-M\right)!\left(N-i_2\right)!}-\frac{1}{\left(i_1-M\right)!\left(N-i_1\right)!}\right)\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=2}^{K_1}\bar{L}_{i_k}\left(j_h\right)+$$
$$\left(\frac{1}{\left(i_3-M\right)!\left(N-i_3\right)!}-\frac{1}{\left(i_2-M\right)!\left(N-i_2\right)!}\right)\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=3}^{K_1}\bar{L}_{i_k}\left(j_h\right)+$$
$$\cdots+$$
$$\left(\frac{1}{\left(i_{K_1}-M\right)!\left(N-i_{K_1}\right)!}-\frac{1}{\left(i_{K_1-1}-M\right)!\left(N-i_{K_1-1}\right)!}\right)\times$$
$$\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=K_1}^{K_1}\bar{L}_{i_k}\left(j_h\right)。$$

记 $A_1=A=\left\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{K_1}\right\}$，$A_l=\left\{i_l,\ i_{l+1},\ \cdots,\ i_{K_1}\right\}$，其中 $l=2, 3, \cdots, K_1$，则上式可写为

$$\chi\left(A,B\right)=\sum_{h=1}^{K_2}\sum_{k=1}^{K_1}L_{i_k}\left(j_h\right)=$$
$$\frac{1}{\left(i_1-M\right)!\left(N-i_1\right)!}\Omega\left(A_1,B\right)+$$
$$\left(\frac{1}{\left(i_2-M\right)!\left(N-i_2\right)!}-\frac{1}{\left(i_1-M\right)!\left(N-i_1\right)!}\right)\Omega\left(A_2,B\right)+$$
$$\left(\frac{1}{\left(i_3-M\right)!\left(N-i_3\right)!}-\frac{1}{\left(i_2-M\right)!\left(N-i_2\right)!}\right)\Omega\left(A_3,B\right)+$$
$$\cdots+$$
$$\left(\frac{1}{\left(i_{K_1}-M\right)!\left(N-i_{K_1}\right)!}-\frac{1}{\left(i_{K_1-1}-M\right)!\left(N-i_{K_1-1}\right)!}\right)\Omega\left(A_{K_1},B\right)。$$

该式说明了简化式（14）或式（16）的重要性。因为只要能简化式（14）或式（16），就可以用相同的方法简化所有的 $\Omega(A_l, B)(l=2, 3, \cdots, K_1)$，从而可进一步对上式进行适当的估计。

参考文献：

[1] VAUGHAN R C. The Hardy-Littlewood Method[M]. 2nd ed. London：Cambridge University Press，1997：1-56.

[2] MILLER. S J，TAKLOO-BIGHASH R. An Invitation to Modern Number Theory[M]. New Jersey：Princeton University Press，2006：78-135.

[3] HARDY G H，RAMANUJAN S. Asymptotic Formula in Combinatory Analysis[J]. Proceedings of the London Mathematical Society，1918，17(1)：75-115.

[4] HARDY G H，LITTLEWOOD J E. A New Solution of Waring's Problem[J]. Q. J. Math.，1919，48：272-293.

[5] HARDY G H，LITTLEWOOD J E. Some Problems 'Partitio Numerorum'(III): On the Expression of a Number as a Sum of Primes[J]. Acta Mathematica，1923，44(1)：1-70.

[6] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社，1997：353-376.
PAN Chengdong，PAN Chengbiao. An Introduction to Analytic Number Theory[M]. Beijing：Science Press，1997：353-376.

[7] RICHARD K G. Unsolved Problems in Number Theory[M]. 3rd ed. Berlin：Springer-Verlag，2004：1-170.

[8] ENDER S，DAVID F M. An Introduction to Numerical Analysis[M]. London：Cambridge University Press，2003：206-210.

[9] 彭国华，李德琅 . Linear Algebra[M]. 北京：高等教育出版社，2006：43-44.
PENG Guohua，LI Delang. Linear Algebra[M]. Beijing：Higher Education Press，2006：43-44.

[10] 颜松远 . 整数分解 [M]. 北京：科学出版社，2009：66-70.
YAN Songyuan. Integer Factorization[M]. Beijing：Science Press，2009：66-70.

（责任编辑：邓光辉）

（上接第 5 页）

[4] GUO C H，HIGHAM N J，TISSEUR F. Detecting and Solving Hyperbolic Quadratic Eigenvalue Problems[J]. SIAM Journal Matrix Analysis Applications，2009，30(4)：1593-1613.

[5] GUO C H，LANCASTER P. Algorithms for Hyperbolic Quadratic Eigenvalue Problems[J]. Mathematics Computation，2005，74：1777-1791.

[6] BINI D A，GEMIGNANI L，MEINI B. Computations with Infinite Toeplitz Matrices and Polynomials[J]. Linear Algebra Applications，2002，343(2)，21-61.

[7] MEINI B. Efficient Computation of the Extreme Solutions of $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$ and $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}$[J]. Mathematics of Computation，2002，71：1189-1204.

[8] CHIANG C Y，CHU K W，GUO C H，et al. Convergence Analysis of the Doubling Algorithm for Several Nonlinear Matrix Equations in the Critical Case[J]. SIAM Journal Matrix Analysis Applications，2009，31(2)：227-247.

[9] LIN W W，XU S F. Convergence Analysis of Structure-Preserving Doubling Algorithms for Riccati-Type Matrix Equations[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics，2006，28(1)：26-39.

[10] HEINIG G，JANKOWSKI P，ROST K. Fast Inversion Algorithm of Toeplitz-Plus-Hankel Matrices[J]. Numerische Mathematik，1988，52(6)：665-682.

[11] KAILATH T，SAYED A H. Fast Reliable Algorithms for Matrices with Structure[M]. Philadelphia：Society for Industrial and Applied Mathematics，1999：37-45.

[12] GOHBERG I，KAILATH T，OLSHEVSKY V. Fast Gaussian Elimination with Partial Pivoting for Matrices with Displacement Structure[J]. Mathematics Computation，1995，64：1557-1576.

（责任编辑：邓光辉）