第 32 卷第 1 期　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　Vol.32 No.1
2018 年 1 月　　Journal of Hunan University of Technology　　Jan. 2018

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2018.01.002

基于 α- 链对角占优 H- 矩阵的判定

熊　亮，刘建州，路康亚

（湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105）

摘　要：H- 矩阵是数学和工程应用中的一类特殊矩阵，它在数值代数、数学物理、控制理论等领域有着重要的应用。根据 α- 链对角占优的性质，通过构造正对角矩阵以及分割矩阵指标集，运用加权平均不等式、不等式放缩等技巧，得到了判别非奇异 H- 矩阵的充分条件。最后，通过数值实例来说明判定方法的有效性。

关键词：H- 矩阵；严格 α- 链对角占优矩阵；不可约；非零元素链

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2018)01-0006-05

Criteria for H-Matrices Based on α-Chain Diagonally Dominant

XIONG Liang，LIU Jianzhou，LU Kangya

（School of Mathematics and Computational Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China）

Abstract：As a special class of matrix in the mathematical and engineering applications, H-matrix also finds its important application in the fields of numerical algebra, mathematical physics, control theory, etc. Based on the properties of α-chain diagonally dominant, sufficient conditions for the discrimination of the non-singular H-matrix has thus been obtained by constructing the positive diagonal matrix and the index set of partition matrix, and by adopting such techniques as the weighted mean inequality and inequality zooming. Finally, corresponding numerical examples are presented to verify the validity of the determination method.

Keywords：H-matrix；strict α-chain diagonally dominant matrix；irreducible；nonzero elements chain

在矩阵分析和数值代数中，H- 矩阵是研究的重要课题之一，得出的研究成果在计算数学、矩阵理论、控制论等领域有着广泛的应用。例如：求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 H- 矩阵时，许多经典迭代法及其修正算法均是收敛的。因此，研究判定 H- 矩阵简捷、有效的方法具有重大的理论意义和实际价值。近年来，高益明、孙玉祥等学者通过构造不同的正对角矩阵，结合划分矩阵指标集、不等式放缩等技巧，给出了一些 H- 矩阵的直接判定方法 [1-13]。何安琪、Xie Q. M. 等学者在已有理论的基础上，给出了一些 H- 矩阵的迭代判别算法 [6-8]，这些算法加快了判定的速度并扩大了判别的范围。本文根据严格 α- 链对角占优的性质，通过构造正对角矩阵和划分矩阵指标集，运用不等式放缩等技巧，在文献 [1-3] 的基础上，给出 H- 矩阵的一组新的实用判别法。并用数值实例说明判别法的有效性。

收稿日期：2017-12-03

基金项目：国家自然科学基金资助项目（11571292）

作者简介：熊　亮（1991-），男，湖南衡阳人，湘潭大学博士生，主要研究方向为矩阵分析及其应用，E-mail：625713306@qq.com

通信作者：刘建州（1960-），男，湖南邵阳人，湘潭大学教授，博士生导师，主要研究方向为数值代数，矩阵分析，线性控制，E-mail：Liujz@xtu.edu.cn

1　预备知识

本文用 $\mathbf{C}^{n\times n}(\mathbf{R}^{n\times n})$ 表示所有 $n\times n$ 复（实）矩阵的集合，$N=\{1,2,\cdots,n\}$。设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\alpha\in[0,1]$，对任意的 $i\in N$，记

$$\Lambda_i=\sum_{j\in N,\,j\neq i}|a_{ij}|,$$

$$S_i=\sum_{j\in N,\,j\neq i}|a_{ji}|,$$

$$J_1=\left\{i\,|\,0<|a_{ii}|\leqslant\Lambda_i^{\alpha}S_i^{(1-\alpha)}\right\},$$

$$J_2=\left\{i\,\|\,a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{(1-\alpha)}\right\}。$$

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$，且 A 可表示为

$$A=sI-P,\ P\geqslant 0,\ s>0。$$

若 $s>\rho(P)$，则称 A 为非奇异 M− 矩阵，其中 $P\geqslant 0$ 表示 P 是非负矩阵，$\rho(P)$ 表示矩阵 P 的谱半径。

定义 2　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\mu(A)=(m_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$。若 $m_{ij}(i,j\in N)$ 满足

$$m_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|,\ i=j;\\-|a_{ij}|,\ i\neq j;\end{cases}$$

则称 $\mu(A)$ 为 A 的比较矩阵。若 A 的比较矩阵 $\mu(A)$ 是非奇异 M− 矩阵，则称 A 为 H− 矩阵。

定义 3　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $|a_{ij}|>\Lambda_i(i\in N)$，则称 A 为严格对角占优矩阵，记为 $A\in SD$；若存在正对角矩阵 X，使得 $AX\in SD$，则称 A 为广义严格对角占优矩阵，记为 $A\in GSD$。

显然，A 是 H− 矩阵当且仅当 A 是广义严格对角占优矩阵。

定义 4　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得对任意的 $i\in N$，有

$$|a_{ii}|\geqslant\Lambda_i^{\alpha}S_i^{(1-\alpha)},$$

则称 A 为 α− 链对角占优矩阵；若不等式严格成立，则称 A 为严格 α− 链对角占优矩阵。

引理 1[9]　矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$A$ 为广义严格对角占优矩阵，当且仅当存在正对角矩阵 D_1 和 D_2 使得 D_1AD_2 为广义严格对角占优矩阵。

引理 2　对 $\forall x_1>x_2\geqslant 0,\ y_1>y_2\geqslant 0$，$\forall\alpha\in[0,1]$，有 $(x_1-x_2)^{\alpha}(y_1-y_2)^{1-\alpha}\leqslant x_1^{\alpha}y_1^{1-\alpha}-x_2^{\alpha}y_2^{1-\alpha}$。

证明　要证结论成立，即证

$$\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\alpha}\leqslant 1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\alpha}。$$

因为

$$\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\alpha}+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\alpha}\leqslant$$

$$\alpha\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)+(1-\alpha)\left(1-\frac{y_2}{y_1}\right)+\alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+$$

$$(1-\alpha)\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=1,$$

所以结论成立。证毕。

引理 3[4]　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 且为 α− 链对角占优矩阵，若 A 满足下列条件之一，则 A 为广义严格对角占优矩阵：

1）A 不可约，$J_{\alpha}(A)=\left\{i\in N\,\|\,a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{(1-\alpha)}\right\}\neq\varnothing$；

2）$J_{\alpha}(A)=\left\{i\in N\|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{(1-\alpha)}\right\}\neq\varnothing$，且 $\forall i\in N-J_{\alpha}(A)$，必存在非零元素序列 $a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_si_m}$，其中 $i\neq i_1,\ i_1\neq i_2,\cdots,\ i_s\neq i_m,\ i_m\in J_{\alpha}(A)$。

若 $J_1=\varnothing$，则 A 为严格 α− 链对角占优矩阵，因此 A 是严格对角占优矩阵；若 $J_2=\varnothing$，则 A 不是广义严格 α− 链对角占优矩阵。因此总是假设 $J_1,J_2\neq\varnothing$，且主对角线元素非零。

2　基于 α− 链对角占优的 H− 矩阵的判定定理

本章根据严格 α− 链对角占优的性质，通过构造正对角矩阵和划分矩阵指标集，运用不等式放缩等技巧，给出以下几个 H− 矩阵判别法。

假设 $N=N_1\oplus N_2$，记

$$\beta_i=\left(\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq i}}|a_{ik}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq i}}|a_{ki}|\right)^{1-\alpha},$$

$$\beta_j=\left(\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{jk}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{kj}|\right)^{1-\alpha}。$$

定理 1　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果存在 N_1 和 N_2 满足 $N=N_1\oplus N_2$，$N_2\subseteq J_2\neq\varnothing$，$J_1\neq\varnothing$，使得 $\forall i\in N_1$，$j\in N_2$，有

$$\left(|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i\right)\left(|a_{jj}|-\beta_j\right)>\beta_i\left(\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}-\beta_j\right),\tag{1}$$

则 A 为 H− 矩阵。

证明　显然 $\forall j\in N_2$ 有 $|a_{jj}|>\beta_j$，由式（1）成立，可知 $\forall i\in N_1$，$|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i>0$，即

$|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}-\beta_i$。若 β_i=0，则必有 $|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，因此，$\forall i\in J_1\subseteq N_1$，必有 $\beta_i>0$。

记 $d^{(1)}=\min\limits_{i\in N_1}\dfrac{|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i}{\beta_i}$，当 β_i=0 时取

$$\frac{|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i}{\beta_i}=+\infty;$$

$$d^{(2)}=\max_{j\in N_2}\frac{\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}-\beta_j}{|a_{jj}|-\beta_j}。$$

由式（1）可得 $d^{(1)}>d^{(2)}$。

由于 $J_1\neq\varnothing$，因而存在 $i\in N_1$，满足 $|a_{ii}|\leqslant\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}$，此时 $\beta_i>0$，则 $d^{(1)}=\min\limits_{i\in N_1}\dfrac{|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i}{\beta_i}\leqslant 1$，即 $1\geqslant d^{(1)}>d^{(2)}$。任取 $d^{(1)}>d>d^{(2)}$，令 $\boldsymbol{D}$=diag(d_1, d_2,⋯, d_n)，其中，$\forall i\in N_1$，d_i=1，$\forall j\in N_2$，d_j=d。

下面证明矩阵 $\boldsymbol{B}$=$\boldsymbol{DAD}$=(b_{ij}) 是严格 α− 链对角占优矩阵。

由引理 2 有

1）$\forall i\in N_1$，分 β_i=0 和 $\beta_i>0$ 两种情况：

i）若 β_i=0，则

$$|a_{ii}|>\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha};$$

$$|b_{ii}|-\left(\sum_{k\neq i}|b_{ik}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{k\neq i}|b_{ki}|\right)^{1-\alpha}=$$
$$|a_{ii}|-\left(\sum_{\substack{k\in N_1\\k\neq i}}|a_{ik}|+\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|d\right)^{\alpha}\cdot\left(\sum_{\substack{k\in N_1\\k\neq i}}|a_{ki}|+\sum_{k\in N_2}|a_{ki}|d\right)^{1-\alpha}=$$
$$|a_{ii}|-\left(\Lambda_i-\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|(1-d)\right)^{\alpha}\cdot\left(S_i-\sum_{k\in N_2}|a_{ki}|(1-d)\right)^{1-\alpha}\geqslant$$
$$|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\left(\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{k\in N_2}|a_{ki}|\right)^{1-\alpha}(1-d)=$$
$$|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}>0。$$

ii）若 $\beta_i>0$，由于 $\forall i\in N_1$，$\beta_i>0$ 时，$\dfrac{|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i}{\beta_i}\geqslant d^{(1)}>d$，则

$$|b_{ii}|-\left(\sum_{k\neq i}|b_{ik}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{k\neq i}|b_{ki}|\right)^{1-\alpha}=$$
$$|a_{ii}|-\left(\sum_{\substack{k\in N_1\\k\neq i}}|a_{ik}|+\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|d\right)^{\alpha}\cdot\left(\sum_{\substack{k\in N_1\\k\neq i}}|a_{ki}|+\sum_{k\in N_2}|a_{ki}|d\right)^{1-\alpha}=$$
$$|a_{ii}|-\left(\Lambda_i-\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|(1-d)\right)^{\alpha}\cdot\left(S_i-\sum_{k\in N_2}|a_{ki}|(1-d)\right)^{1-\alpha}\geqslant$$
$$|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\left(\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{k\in N_2}|a_{ki}|\right)^{1-\alpha}(1-d)=$$
$$|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i-\beta_i d>0。$$

2）$\forall j\in N_2$，由于 $\dfrac{\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}-\beta_j}{|a_{jj}|-\beta_j}\leqslant d^{(2)}<d$，由引理 2 得

$$|b_{jj}|-\left(\sum_{k\neq j}|b_{jk}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{k\neq j}|b_{kj}|\right)^{1-\alpha}=$$
$$|a_{jj}|d^2-\left(\sum_{k\in N_1}|a_{jk}|d+\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{jk}|d^2\right)^{\alpha}\cdot\left(\sum_{k\in N_1}|a_{kj}|d+\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{kj}|d^2\right)^{1-\alpha}=$$
$$|a_{jj}|d^2-\left(\Lambda_i-\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{jk}|(1-d)\right)^{\alpha}\cdot\left(S_i-\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{kj}|(1-d)\right)^{1-\alpha}d\geqslant$$
$$|a_{jj}|d^2-\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}d+\left(\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{jk}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{kj}|\right)^{1-\alpha}(1-d)d=$$
$$\left(|a_{jj}|-\beta_j\right)d^2-\left(\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}-\beta_j\right)d>0。$$

综上所述，$\boldsymbol{B}$ 为严格 α− 链对角占优矩阵，则 $\boldsymbol{B}$

为广义严格对角占优矩阵。由引理 1 可知，$\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 为 H- 矩阵。

注记　当 α=1 时，式（1）为

$$\left(|a_{ii}|-\sum_{\substack{k\in N_1\\k\neq i}}|a_{ik}|\right)\left(|a_{jj}|-\sum_{\substack{k\in N_2\\k\neq j}}|a_{jk}|\right)>$$

$$\left(\sum_{k\in N_2}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{k\in N_1}|a_{jk}|\right),$$

即为文献 [2] 中定理 4 的结果。

由引理 3 以及定理 1 的证法，可得到在不可约和非零元素链下的相应结论。

令

$$J(\boldsymbol{A})=\{i\in N_1, j\in N_2 \mid \beta_i>0,$$
$$\left(|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i\right)\left(|a_{jj}|-\beta_j\right)=\beta_i\left(\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}-\beta_j\right)\}\cup$$
$$\{i\in N_1, j\in N_2 \mid \beta_i=0,\ |a_{ii}|=\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}\}。$$

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，如果存在 N_1 和 N_2 满足 $N=N_1\oplus N_2$，$N_2\subseteq J_2\neq\varnothing$，$J_1\neq\varnothing$，使得 $\forall i\in N_1$，$j\in N_2$，式

$$\left(|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i\right)\left(|a_{jj}|-\beta_j\right)\geqslant\beta_i\left(\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}-\beta_j\right)\quad(2)$$

成立，且 $J(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$，若 $\boldsymbol{A}$ 满足下列条件之一：

i）不可约，且 $N\setminus J(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$；

ii）$\forall i\in J(\boldsymbol{A})$，存在非零元素序列 $a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_si_m}$，其中 $i\neq i_1, i_1\neq i_2, \cdots, i_s\neq i_m$，$i_m\in N\setminus J(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$。

则 $\boldsymbol{A}\in GSD$，即 $\boldsymbol{A}$ 为 H- 矩阵。

证明　仍记 $d^{(1)}=\min\limits_{i\in N_1}\dfrac{|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i}{\beta_i}$，当 β_i=0 时取

$$\frac{|a_{ii}|-\Lambda_i^{\alpha}S_i^{1-\alpha}+\beta_i}{\beta_i}=+\infty,$$

$$d^{(2)}=\max_{j\in N_2}\frac{\Lambda_j^{\alpha}S_j^{1-\alpha}-\beta_j}{|a_{jj}|-\beta_j}。$$

由式（2）可得 $d^{(1)}\geqslant d^{(2)}$。任取 $d^{(1)}\geqslant d\geqslant d^{(2)}$，令 $D=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，其中 $\forall i\in N_1$，d_i=1，$\forall j\in N_2$，d_j=d。令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DAD}$，类似定理 1 的证明可知，$\boldsymbol{B}$ 为 α- 链对角占优矩阵。

由于 $\boldsymbol{D}$ 是正对角矩阵，当 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 i）或 ii）时，$\boldsymbol{B}$ 分别满足下列条件 1）或 2）。

1）$\boldsymbol{B}$ 不可约，且 $N\setminus J(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$；

2）$\forall i\in J(\boldsymbol{A})$，存在非零元素序列 $b_{ii_1}, b_{i_1i_2}, \cdots, b_{i_si_m}$，其中 $i\neq i_1, i_1\neq i_2, \cdots, i_s\neq i_m$，$i_m\in N\setminus J(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$。

由引理 3 可知，$\boldsymbol{B}$ 为广义严格对角占优矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 为 H- 矩阵。

证毕。

3　数值实例

例 1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.2 & 0.1\\ 0.3 & 1 & 0.1 & 0.2\\ 0.4 & 0.5 & 1 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 0.5 & 1.06\end{bmatrix},$$

取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 J_2={2}，取 N_1={1, 3, 4}，N_2={2}，试判定 $\boldsymbol{A}$ 是否为 H- 矩阵。

解　通过计算易得

$$\left(|a_{11}|-\Lambda_1^{\frac{1}{2}}S_1^{\frac{1}{2}}+\beta_1\right)\left(|a_{22}|-\beta_2\right)=0.3217>$$
$$\beta_1\left(\Lambda_2^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}}-\beta_2\right)=0.3059,$$
$$\left(|a_{33}|-\Lambda_3^{\frac{1}{2}}S_3^{\frac{1}{2}}+\beta_3\right)\left(|a_{22}|-\beta_2\right)=0.2038>$$
$$\beta_3\left(\Lambda_2^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}}-\beta_2\right)=0.1975,$$
$$\left(|a_{44}|-\Lambda_4^{\frac{1}{2}}S_4^{\frac{1}{2}}+\beta_4\right)\left(|a_{22}|-\beta_2\right)=0.2520>$$
$$\beta_4\left(\Lambda_2^{\frac{1}{2}}S_2^{\frac{1}{2}}-\beta_2\right)=0.2498。$$

由定理 1 知，$\boldsymbol{A}$ 为 H- 矩阵。

在文献 [5] 的定理 1 中，取 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，则 $J(\boldsymbol{A})$={2}，$N(\boldsymbol{A})$={1, 3, 4}。由于

$$|a_{44}|=1.06<$$
$$\left(\sum_{\substack{j\in N(A)\\j\neq i}}|a_{4j}|+\sum_{i\in J(A)}|a_{4j}|e_j\right)^{\frac{1}{2}}S_4^{\frac{1}{2}}=1.0623,$$

其中 $e_j=\dfrac{\Lambda_j(\boldsymbol{A})S_j^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|^{\frac{1}{\alpha}}}$。

即 $\boldsymbol{A}$ 不满足文献 [5] 中的定理 1，所以不能用文献 [5] 中的定理 1 来判定 $\boldsymbol{A}$ 为 H- 矩阵。

例 1 表明，本文所给出的判定 H- 矩阵的方法是有效的。

参考文献：

[1] GAO Y M，WANG X H. Criteria for Generalized Diagonally Dominant Matrices and M-Matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications，1992，169：257–268.

[2] 高益明 . 广义对角占优矩阵与 M- 矩阵的判定准则 [J]. 高等学校计算数学学报，1992，14(3)：233–239.
GAO Yiming. Criteria of the Generalized Diagonally Dominant Matrices and M-Matrices[J]. Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities，1992，14(3)：233–239.

[3] 孙玉祥 . 广义对角占优矩阵的充分条件 [J]. 高等学校计算数学学报，1997，19(3)：216–223.
SUN Yuxiang. Sufficient Conditions for Generalized Diagonally Dominant Matrices[J]. Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities，1997，19(3)：216–223.

[4] SUN Y X. An Improvement on a Theorem by Ostrowski and Its Applications[J]. Northeastern Math.，1991，7(4)：497–502.

[5] 李庆春，胡文杰 . 广义严格对角占优矩阵的判定准则 [J]. 高校应用数学学报，1999，14(2)：229–234.
LI Qingchun，HU Wenjie. Criteria of the Generalized Strictly Diagonally Dominant Matrices[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities，1999，14(2)：229–234.

[6] 何安琪，刘建州 . 广义严格对角占优矩阵的判定条件 [J]. 工程数学学报，2008，25(6)：1121–1124.
HE Anqi，LIU Jianzhou. Criteria for Generalized Strictly Diagonally Dominant Matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2008，25(6)：1121–1124.

[7] XIE Q M，HE A Q，LIU J Z. On the Iterative, Method for H-Matrices[J]. Applied Mathematics and Computation，2007，189(1)：41–48.

[8] ALANELLI M，HADJIDIMOS A. A New Iterative Criterion for H-Matrices[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2006，29(1)：160–176.

[9] HORN R A，JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis[M]. New York：Cambridge University Press，1991：115.

[10] LIU J Z，WANG L L，LYU Z H. Several Criteria for Judging H-and Non-H-Matrices[J]. International Journal of Computer Mathematics，2015，93(3)：559–566.

[11] LI G Q，LIU J Z，ZHANG J. The Disc Theorem for the Schur Complement of Two Class Submatrices with γ-Diagonally Dominant Properties[J]. Numerical Mathematics Theory Methods and Applications，2017，10(1)：84–97.

[12] LIU J Z，ZHANG J，ZHOU L X，et al. The Nekrasov Diagonally Dominant Degree on the Schur Complement of Nekrasov Matrices and Its Applications[J]. Applied Mathematics and Computation，2018，320：251–263.

[13] 张俊丽，红　艳 . 广义严格对角占优矩阵的实用判定准则 [J]. 内蒙古民族大学学报（自然科学版），2017，32(6)：470–473.
ZHANG Junli，HONG Yan. Practical Criteria for Generalized Strictly Diagonally Dominant Matrix[J]. Journal of Inner Mongolia University for Nationalities (Natural Sciences)，2017，32(6)：470–473.

（责任编辑：邓光辉）