第31卷第1期　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　Vol.31 No.1
2017年1月　　Journal of Hunan University of Technology　　Jan. 2017

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2017.01.011

分析时变时滞系统稳定性的新判据

陈　刚，王　信

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：通过 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法对时变时滞线性系统稳定性进行分析，获得了新的稳定性判据。构造一个合适的 Lyapunov 泛函，采取基于自由矩阵的积分不等式处理其中的积分项。根据 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理，针对该系统建立一个新的时滞相关条件。从数值对比可看出，该条件具有更小的保守性。

关键词：Lyapunov-Krasovskii 泛函；稳定性判据；基于自由矩阵的积分不等式

中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2017)01-0060-04

A New Criterion for the Stability Analysis of Time Varying Delay Systems

CHEN Gang，WANG Xin

（School of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A new criterion has been obtained for the stability analysis of time varying delay systems by adopting Lyapunov-Krasovskii functional method. An appropriate Lyapunov functional has thus been constructed, with the integral term to be treated by an integral inequality based on free matrix. Based on Lyapunov-Krasovskii stability theorem, a new delay dependent condition is to be established for the system. It can be seen from the numerical comparison that the condition is less conservative, thus demonstrating the validity of the criterion.

Keywords：Lyapunov-Krasovskii’s functional（LKF）；stability criterion；free-matrix-based integral inequality

0　引言

在控制领域，时滞现象广泛存在，而时滞的存在往往会对系统的稳定性以及其他性能产生不好的影响。比如，网络控制系统中的网络诱导时延，会导致控制系统的性能下降。因此，对时滞现象的研究具有重要的理论和实际意义。

在时滞系统中，对时滞相关稳定性的研究是一个十分热门的课题。其主要研究内容是，在时间相关领域下获得能够保证系统稳定的时滞相关稳定性判据以及最大时滞界限。近年来，已有大量时滞系统的时滞相关稳定性判据被导出（见文献[1-7]）。为获得含有时滞信息并且保证系统稳定性的时滞相关条件，各种模型变换方法和对交叉项的界定公式相继被提出（见文献[8]）。但是模型变换后与原系统的不等价以及对交叉项界定的不精确导致了保守性的产生。为了得到具有更小保守性的稳定性判据，E. Fridman 等[9]提出了广义模型变换方法，这种方法使变换后的模型与原系统等价，但是仍然无法避免对交叉项的界定，因此，这种方法必然也具有保守性。针对该问

收稿日期：2016-10-13

基金项目：广东省特种光纤材料与器件工程技术研究开发中心开放基金资助项目

作者简介：陈　刚（1977-），男，湖南新化人，湖南工业大学副教授，主要从事鲁棒控制，时滞系统，网络控制等方面的研究，E-mail：drchengang@163.com

通信作者：王　信（1992-），男，湖南张家界人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为鲁棒控制，时滞系统，神经网络等，E-mail：463838108@qq.com

题，文献 [4] 提出了自由权矩阵方法，这种方法无需进行模型变换以及对交叉项的界定，能够获得具有更小保守性的稳定性判据，数值分析结果见文献 [10]。同比之下，文献 [8] 提出了积分不等式方法，并将这一方法运用在线性时滞系统、中立型时滞系统、线性时滞广义系统、线性离散时滞系统中，经理论分析，所得结果具有更小保守性。因此，本文所得结论是建立在文献 [8] 所提积分不等式方法基础之上。

由 Lyapunov 和 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理得知，构建 Lyapunov-Krasovskii 泛函（LKF）以及保证其导数的负定，是得到稳定性判据的关键。Zeng H. B. 等 [11] 提出 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法的保守性主要来自 2 个方面：LKF 的选取和其导数的界定。这也是本文在获取有效稳定性判据的 2 大难题。LKF 的选取往往是通过经验获得，然而至今都未能找到规律性的方法。LKF 导数的界定主要有：Jensen 不等式 [1]、Writinger 积分不等式 [6]、相互凸方法 [2]、自由权矩阵 [4] 以及自由矩阵不等式 [11] 等方法。

在时域范围内，本文构建了一个合适的 LKF，利用文献 [11] 提出的自由矩阵不等式方法，并加入自由权矩阵，获得使时变时滞线性系统稳定的稳定性判据。实例比较证明了本方法具有更小的保守性。

本文采用的标号 [12] 说明如下：$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^{n\times m}$ 分别表示实数域的 n 维向量、$n\times m$ 维向量的矩阵空间；矩阵 $\boldsymbol{X}>0$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是对称正定阵；$\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 分别表示零矩阵和单位矩阵；“⊥”表示矩阵的正交补；$\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{N}\}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$；“*”表示块矩阵的对称项。

1　系统描述

时变时滞线性系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-h(t)),\ \forall t\geqslant 0;\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-h,0]。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^n$ 是具有合适维度的矩阵；$h(t)$ 是时变时滞且满足

$$0\leqslant h(t)\leqslant h,\ \mu_1\leqslant\dot{h}(t)\leqslant\mu_2,\tag{2}$$

其中 h 和 μ_i 是恒定的；$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为初始状态，是给定的向量值函数。

为了得到主要结论，引用如下引理。

引理 1[11]　定义 $\boldsymbol{x}$ 为在区间 $[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbf{R}^n$ 上可导函数。对于对称矩阵 $\boldsymbol{\Theta}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_3\in\mathbf{R}^{3n\times 3n}$，以及任意矩阵 $\boldsymbol{Z}_2\in\mathbf{R}^{3n\times 3n}$ 和 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\in\mathbf{R}^{3n\times n}$，满足

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & \boldsymbol{Z}_2 & \boldsymbol{N}_1\\ * & \boldsymbol{Z}_3 & \boldsymbol{N}_2\\ * & * & \boldsymbol{\Theta}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

则不等式

$$-\int_\alpha^\beta \bar{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\Theta}\bar{\boldsymbol{X}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\varpi}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\varpi}\tag{3}$$

成立，

式中：$\bar{\boldsymbol{\Omega}}=(\beta-\alpha)\left(\boldsymbol{Z}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{Z}_3\right)+\mathrm{Sym}\left\{\boldsymbol{N}_1\bar{\boldsymbol{\Pi}}_1+\boldsymbol{N}_2\bar{\boldsymbol{\Pi}}_2\right\}$,

其中 $\bar{\boldsymbol{\Pi}}_1=\bar{e}_1-\bar{e}_2$，$\bar{\boldsymbol{\Pi}}_2=2\bar{e}_3-\bar{e}_1-\bar{e}_2$，$\bar{e}_1=[\boldsymbol{I}\ \ \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}]$，$\bar{e}_2=[\mathbf{0}\ \ \boldsymbol{I}\ \ \mathbf{0}]$，$\bar{e}_3=[\mathbf{0}\ \ \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{I}]$；

$$\varpi=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\beta)\quad\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\quad\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}。$$

引理 2[13]　给定向量 $\boldsymbol{\zeta}\in\mathbf{R}^n$，以及矩阵 $\boldsymbol{\varDelta}=\boldsymbol{\varDelta}^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{m\times n}$（$\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})<n$）。下面的不等式等价：

1）$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varDelta}\boldsymbol{\zeta}<0$，$\forall\boldsymbol{C}\boldsymbol{\zeta}=0$，$\boldsymbol{\zeta}\neq 0$；

2）$\left(\boldsymbol{C}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varDelta}\boldsymbol{C}^{\perp}<0$。

2　主要结论

本文用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法导出基于系统（1）的稳定性判据。为了使表达更加简洁，定义如下矩阵：

$$\boldsymbol{\upsilon}_1(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_2(t)=\left[\int_{t-h(t)}^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \int_{t-h}^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_3(t)=\left[\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \frac{1}{h-h(t)}\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_4(t)=\left[\int_{t-h}^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\eta}_1(t)=\left[\boldsymbol{\upsilon}_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{\upsilon}_2^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\left[\boldsymbol{\upsilon}_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{\upsilon}_3^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{\upsilon}_4^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{e}_i=\left[\mathbf{0}_{n\times(i-1)n}\ \ \boldsymbol{I}_n\ \ \mathbf{0}_{n\times(9-i)n}\right],\ i=1,2,\cdots,9。$$

定理　给定标量 $h>0$ 和 $\mu_1<\mu_2<1$。如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}(\in\mathbf{R}^{6n\times 6n})>0$，$\boldsymbol{Q}(\in\mathbf{R}^{2n\times 2n})>0$，$\boldsymbol{H}(\in\mathbf{R}^{2n\times 2n})>0$ 和 $\boldsymbol{\Theta}(\in\mathbf{R}^{n\times n})>0$，对称矩阵 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_3\in\mathbf{R}^{3n\times 3n}$，任意矩阵 $\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2\in\mathbf{R}^{3n\times 3n}$，$\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2\in\mathbf{R}^{3n\times n}$ 以及 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{R}^{9n\times n}$，对于 $h(t)\in[0,h]$ 和 $\dot{h}[\mu_1,\mu_2]$ 有矩阵不等式

$$\boldsymbol{\varXi}=\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\left(\varXi_1+\varXi_2\right)\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}<0,\tag{4}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 & \boldsymbol{N}_1\\ * & \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{N}_2\\ * & * & \boldsymbol{\Theta}\end{bmatrix}\geqslant 0,\tag{5}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{Y}_2 & \boldsymbol{M}_1\\ * & \boldsymbol{Y}_3 & \boldsymbol{M}_2\\ * & * & \boldsymbol{\Theta}\end{bmatrix}\geqslant 0\tag{6}$$

成立，则系统（1）是渐近稳定的。

式（4）~（6）中：

$$\Xi_1=\mathrm{Sym}\left\{\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Pi}_{12}\right\}+\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_3-\bar{h}(t)\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm T}\times \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_4+\bar{h}(t)\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Pi}_4-\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm T}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Pi}_5+\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm T}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_3-\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm T}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_5+h\boldsymbol{e}_7^{\mathrm T}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{e}_7,$$

$$\Xi_2=h(t)\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm T}\left(\boldsymbol{X}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{X}_3\right)\boldsymbol{\Pi}_6+(h-h(t))\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm T}\times\left(\boldsymbol{Y}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{Y}_3\right)\boldsymbol{\Pi}_7+\mathrm{Sym}\left\{\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{\Pi}_8+\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\Pi}_9+\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm T}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\Pi}_{10}+\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm T}\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\Pi}_{11}\right\},$$

其中$\boldsymbol{\Pi}_1=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm T}\ \ h(t)\boldsymbol{e}_4^{\mathrm T}\ \ (h-h(t))\boldsymbol{e}_5^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_6^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_2=\left[\boldsymbol{e}_7^{\mathrm T}\ \ \bar{h}(t)\boldsymbol{e}_8^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_9^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}-\bar{h}(t)\boldsymbol{e}_2^{\mathrm T}\ \ \bar{h}(t)\boldsymbol{e}_2^{\mathrm T}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_3=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_7^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_4=\left[\boldsymbol{e}_2^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_8^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_5=\left[\boldsymbol{e}_3^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_9^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_6=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_4^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_7=\left[\boldsymbol{e}_2^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm T}\ \ \boldsymbol{e}_5^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\Pi}_8=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\Pi}_9=2\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\Pi}_{10}=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\Pi}_{11}=2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{\Pi}_{12}=h(t)\boldsymbol{e}_4+(h-h(t))\boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6$，$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_7$，$\bar{h}(t)=1-\dot{h}(t)$。

证明 选取Lyapunov-Krasovskii泛函

$$V(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)+\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\eta}_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{H}\boldsymbol{\eta}_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t}\int_{\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{\Theta}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta。\quad(7)$$

当$\boldsymbol{P}>0, \boldsymbol{Q}>0, \boldsymbol{H}>0, \boldsymbol{S}>0$以及$\boldsymbol{\Theta}>0$时，该函数是正定的，即$V(\boldsymbol{x}_t)>0$。对$V(\boldsymbol{x}_t)$求导，可得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)=\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm T}(t)\left[\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_1+\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_3-h\boldsymbol{e}_7^{\mathrm T}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{e}_7\right]\boldsymbol{\xi}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{\Theta}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\quad(8)$$

利用引理1中的结论，处理式（8）的积分项。当存在$\boldsymbol{\Phi}_1\geqslant 0, \boldsymbol{\Phi}_2\geqslant 0$，则有

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{\Theta}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s=-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{\Theta}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t-h(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(s)\boldsymbol{\Theta}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)\left\{h(t)\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm T}\times\left(\boldsymbol{X}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{X}_3\right)+(h-h(t))\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm T}\left(\boldsymbol{Y}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{Y}_3\right)\boldsymbol{\Pi}_7+\mathrm{Sym}\left\{\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{\Pi}_8+\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm T}\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\Pi}_9+\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm T}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{\Pi}_{10}+\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm T}\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{\Pi}_{11}\right\}\right\}\boldsymbol{\xi}(t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)\Xi_2\boldsymbol{\xi}(t)。\quad(9)$$

对于$\boldsymbol{G}\in\mathbf{R}^{9n\times n}$，可以构造一个恒等于$\mathbf{0}$的项，即

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)\left(\boldsymbol{\Pi}_{12}^{\mathrm T}\boldsymbol{G}^{\mathrm T}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Pi}_{12}\right)\boldsymbol{\xi}(t),\quad(10)$$

式中

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{\Pi}_{12}^{\mathrm T}=\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t-h(t)}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s。$$

结合式（7）~（10），可以推导出

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm T}(t)(\Xi_1+\Xi_2)\boldsymbol{\xi}(t)。\quad(11)$$

因此，根据引理2，若有$\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}(t)=\mathbf{0}$，则定理中的不等式（4）$\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm T}\left(\Xi_1+\Xi_2\right)\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}<0$等价于$(\Xi_1+\Xi_2)<0$，同时也意味着$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)<0$是成立的。根据Lyapunov稳定性定理，系统（1）是渐近稳定的。证毕。

注释1 由于时滞项以及时滞导数项的存在，定理中的矩阵不等式不能直接用LMI工具箱处理。该矩阵对时滞项以及时滞导数项是一个线性函数，因此，如果$\Xi\big|_{h(t)=0,\dot{h}(t)=\mu_1}<0$，$\Xi\big|_{h(t)=0,\dot{h}(t)=\mu_2}<0$，$\Xi\big|_{h(t)=h,\dot{h}(t)=\mu_1}<0$，$\Xi\big|_{h(t)=h,\dot{h}(t)=\mu_2}<0$同时成立，则条件（4）对所有$h(t)\in[0, h]$和$\dot{h}(t)\,[\mu_1, \mu_2]$都将满足。

注释2 由于$\xi^{\mathrm T}(t)$中的状态向量$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm T}(t-h(t))$，当$\dot{h}(t)\geqslant 1$，则不能保证$\dot{V}(\boldsymbol{x}_t)<0$。因此，定理不能应用在$\dot{h}(t)\geqslant 1$的情况下。

3 数值算例

考虑系统（1），其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}。$$

上述实例常常出现在各种文献中，并且已经通过电脑计算出此系统最大许可时滞$h_{\max}$=6.1721。当$\dot{h}(t)=-\mu_1=\mu_2$时，将文献[1], [6], [9], [11]与本文方法得到的h上界进行比较，如表1所示。由表可知，本文方法具有一定的优越性。

表1 当$\dot{h}(t)=-\mu_1=\mu_2$时，h的上界

Table 1 Upper bound for h when $\dot{h}(t)=-\mu_1=\mu_2$

方法	$\dot{h}(t)$				
	0	0.1	0.2	0.5	0.8
文献[9]	4.472	3.604	3.033	2.008	1.364
文献[1]	6.117	4.714	3.807	2.280	1.608
文献[6]	6.059	4.703	3.834	2.420	2.137
文献[11]	6.059	4.788	4.060	3.055	2.615
本文方法	6.059	4.854	4.175	3.161	2.692

4 结语

本文利用Lyapunov-Krasovskii泛函方法，对时变时滞系统的稳定性进行了深入地分析，通过构造一个合适的LKF，利用文献[11]中提出的自由矩阵不等式并加入了一个含有自由权矩阵的零项，得到了一个新的有效时滞相关条件。通过一个实例，将本文方法与其他文献所提方法进行比较可知，本文方法具有更小的保守性。

参考文献：

[1] GU K Q，KHARITONOV V L，CHEN J. Stability of

Time-Delay Systems[M]. Boston：Birkhuser，2003：213–217.

[2] PARK P G，KO J W，JEONG C. Reciprocally Convex Approach to Stability of Systems with Time-Varying Delays[J]. Automatica，2011，47(1)：235–238.

[3] ARIBA Y， GOUAISBAUT F. An Augmented Model for Robust Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. International Journal of Control，2009，82(9)：1616–1626.

[4] WU M，HE Y，SHE J H，et al. Delay-Dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems[J]. Automatica，2004，40(8)：1435–1439.

[5] ARIBA Y，GOUAISBAUT F. Input-Output Framework for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems[C]// Conference on Decision and Control. Shanghai：IEEE，2009：274–279.

[6] SEURET A，GOUAISBAUT F. Wirtinger-Based Integral Inequality：Application to Time-Delay Systems[J]. Automatica，2013，49(9)：2860–2866.

[7] ZHANG X M，HAN Q L. Event-Based H_∞ & Filtering for Sampled-Data Systems[J]. Automatica，2015，51(C)：55–69.

[8] 张先明 . 基于积分不等式方法的时滞相关鲁棒控制研究 [D]. 长沙：中南大学，2006.
ZHANG Xianming. Study on Delay-Dependent Robust Control Based on an Integral Inequality Approach[D]. Changsha：Central South University，2006.

[9] FRIDMAN E，SHAKED U. A Descriptor System Approach to H_∞ , Control of Linear Time-Delay Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2002，47(2)：253–270.

[10] HE Y，WANG Q G，XIE L H，et al. Further Improvement of Free-Weighting Matrices Technique for Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2007，52(2)：293–299.

[11] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2015，60(10)：2768–2772.

[12] 练红海，肖伸平，陈　刚，等 . 基于自由矩阵不等式方法的中立型时滞系统稳定判据 [J]. 湖南工业大学学报，2016，30(5)：37–40.
LIAN Honghai，XIAO Shenping，CHEN Gang，et al. Stability Criteria for Neutral Delay Systems Based on Free Matrix Inequalities[J]. Journal of Hunan University of Technology，2016，30(5)：37–40.

[13] SKELTON R E，IWASAKI T，GRIGORIADIS D E. A Unified Algebraic Approach to Control Design[M]. New York：Taylor and Francis，1997：29–45.

（责任编辑：邓　彬）