doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2017.01.010

基于时间相关 Lyapunov 泛函方法的采样数据系统稳定判据

练红海[1,2]，肖伸平[1,2]，陈　刚[1,2]，王　信[1,2]

（1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007；
2. 湖南工业大学 电传动控制与智能装备湖南省重点实验室，湖南 株洲 412007）

摘　要：采用时间相关连续 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，对线性采样数据控制系统的稳定性问题进行了研究。基于现有的一种自由矩阵积分不等式（见文献[1]），提出了一种新的适用于采样数据系统的自由矩阵积分不等式，利用该不等式处理一次积分项，得到一个确保采样数据系统稳定的充分条件。4个数值实例证明了所提方法的有效性和优越性。

关键词：Lyapunov-Krasovskii 泛函；采样数据系统；稳定性；自由矩阵积分不等式

中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2017)01-0056-04

On the Stability Criteria for Sampled-Data Systems Based on Time-Dependent Lyapunov Functional Theory

LIAN Honghai[1,2]，XIAO Shenping[1,2]，CHEN Gang[1,2]，WANG Xin[1,2]

（1. School of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. Hunan University of Technology，Key Laboratory for Electric Drive Control and Intelligent Equipment of Hunan Province，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：By adopting the time-dependent continuous Lyapunov-Krasovskii functional method, a research has been carried out on the stability of the linear sampled-data systems. Based on the existing free-matrix-based integral inequality (FMBII), a new FMBII, which is suitable for sampled-data control of system, has been proposed. A sufficient condition for the stability of sampled data systems is to be obtained by using the inequality to deal with an integral term, thus working out the sufficient condition that can guarantee the stability of sampled-data system. Four numerical examples are given to testify the efficiency and superiority of the proposed approach.

Keywords：Lyapunov-Krasovskii functional；sampled-data system；stability；free-matrix-based integral inequality

收稿日期：2016-10-15

基金项目：国家自然科学基金资助项目（61672225，61304064），国家火炬计划基金资助项目（2015GH712901），湖南省自然科学基金资助项目（2015JJ3064，2015JJ5021），湖南省教育厅科学研究优秀青年基金资助项目（15B067），广东省特种光纤材料与器件工程技术研究开发中心开放基金资助项目

作者简介：练红海（1990-），男，湖南永州人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为鲁棒控制，神经网络，时滞系统，E-mail：1132830550@qq.com

通信作者：肖伸平（1965-），男，湖南永州人，湖南工业大学教授，主要从事鲁棒控制，过程控制，时滞系统等方面的教学与研究，E-mail：xsph_519@163.com

0　引言

由于现代数字通信技术的发展，采样数据系统被广泛应用于许多领域[1-3]。采样周期是采样数据系统的一个重要参数。如果在系统稳定的情况下获得尽可能大的采样周期，则可以适当降低对通信速率、带宽限制及通信容量的要求。因此，如何在确保采样系统稳定的情况下，获得尽可能大的采样周期是一个值得深入研究的课题。

目前，主要有离散时间[4]、等效脉冲[5]和输入时滞[6]3 类方法研究采样控制系统。其中，输入时滞方法是一种非常有效的方法，它是把采样控制器的输入看作是时滞输入，因此，可用处理时滞系统的方法来分析采样控制系统的稳定性[6]。文献 [6-7] 是基于输入时滞方法，通过构造一个时间相关 Lyaounov 泛函，对采样数据系统的稳定性问题进行研究。文献 [8] 基于离散时间 Lyapunov 理论，研究了采样系统的同步和异步采样问题，并获得了系统的渐近和指数稳定条件。文献 [9] 利用积分二次约束方法，得到了非均匀采样模型和结构不确定的采样系统的鲁棒稳定性条件。文献 [10-11] 将采样系统等效为连续分段的线性系统，研究采样数据系统的鲁棒稳定性，并设计了控制器。上述方法都具有一定的保守性，可以进行改善。

众所周知，Lyapunov 泛函主要用于分析时滞系统和采样数据系统。能否获得更小保守性的结果与怎样处理泛函导数的积分项密切相关。例如积分项 $\int_\alpha^\beta f(s)\mathrm{d}s$，其中$\alpha\leqslant\beta$，且$\alpha$，$\beta$都是大于 0 的常数，$f(s)$ 为二次型函数，处理该积分项的方法主要是积分不等式，其中，最著名的是 Jensen 积分不等式，但是它在处理积分项时做了一定程度的放大，导致获得的结果存在较大的保守性。为了减小对积分项估计的放大作用，Wirtinger 积分不等式[7]、自由矩阵积分不等式[1]等方法被提出。利用上述不等式时，在系统增广向量中引入$\varphi(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x(s)\mathrm{d}s$，那么$\int_\alpha^\beta x(s)\mathrm{d}s=(\beta-\alpha)\varphi(\alpha,\beta)$ 就会引入到相应条件中。对于时滞系统，$d(t)\,\varphi\,(t-d(t),t)$ 可利用逆凸组合方法进行处理，其中 $d(t)\in[d_1,d_2]$。对于采样系统，通常利用时间相关项 $(t_k-t)\,\varphi\,(t_k,t)$ 和其他时间相关项 $\big(如(t_{k+1}-t)f(t)\big)$来减小系统的保守性，其中 $t\in[t_k,t_{k+1}]$。当出现 2 个时间相关项的乘积时$\big(如(t_{k+1}-t)(t_k-t)\times\varphi(t_k,t)f(t)\big)$，处理该交叉乘积项就十分困难。因此，本课题组在 Zeng H. B. 等[1]提出的 FMBII 基础上，提出了一种新的适用于采样数据系统的 FMBII，将采样数据系统转换为时滞线性系统，基于时间相关连续 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法得到采样数据系统的稳定性条件。4 个数值实例表明本文方法的可行性和相比已有结果的优越性。

本文采用如下标号：$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{R}^{n\times m}$分别表示实数域的 n 维向量空间和 $n\times m$ 的矩阵空间；$\mathbb{S}^{n\times n}$（$\mathbb{S}_+^{n\times n}$）表示 n 阶对称矩阵（正定对称矩阵）的集合；R^{T} 和 R^{-1} 分别表示矩阵的转置和逆；$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 分别表示合适维数的单位矩阵和零矩阵；$\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{X}\}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与矩阵 $\boldsymbol{X}$ 转置之和；“*”表示块矩阵中的对称项。

1　系统描述

考虑如下线性系统，

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(\cdot)=[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$为状态向量；$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$和 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$为已知的实矩阵；$\boldsymbol{u}(t)=[\boldsymbol{u}_1(t),\boldsymbol{u}_2(t),\cdots,\boldsymbol{u}_n(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$为控制输入，

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_k),\quad t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{n\times m}$为控制增益矩阵。

假设采样区间的长度满足

$$d_k=t_{k+1}-t_k,\quad d_k\in[d_L,d_U],$$

式中 $d_U\geqslant d_L>0$ 为已知标量。

将 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_k)$ 代入系统（1），得闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{B}_K\boldsymbol{u}(\mathrm{t}),\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{B}_K=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{n\times m}$。

为了推导采样数据系统的稳定性条件，提出一种自由矩阵积分不等式。

引理 1　对任意矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathbb{S}_+^{n\times n}$，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\mathbb{R}^{3n\times n}$，函数 x:[α,β]，使积分不等式（3）成立，即

$$-\int_\alpha^\beta\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta),\tag{3}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Phi}=(\beta-\alpha)\left(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}+\frac{(\beta-\alpha)^2}{3}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}\times\mathrm{Sym}\{[\boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{X}_2,\ 0]\}\right)+\mathrm{Sym}\{[\boldsymbol{X}_1,-\boldsymbol{X}_1,-2\boldsymbol{X}_2]\};$$

$$\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\beta),\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha),\ \int_\alpha^\beta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}。$$

证明　定义 $f(s)=2s-\beta-\alpha$，$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\zeta}(s)=\left[\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta),\ \ f(s)\boldsymbol{\vartheta}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\right]^{\mathrm{T}}。$$

由基本不等式 $-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X}>0$，可得

$$-2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{X}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(s)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)。\tag{4}$$

对式（4）两边在区间 s:[α,β] 积分，有

$$-2\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)[\boldsymbol{X}_1,-\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{0}]\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)-2\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)[\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},-2\boldsymbol{X}_2]\times\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)-2\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\big((\beta-\alpha)[\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{0}]\big)\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)\leqslant(\alpha-\beta)\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)+\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}\boldsymbol{\vartheta}^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\times$$

$$X_2R^{-1}X_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)+\int_\alpha^\beta \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R\dot{x}(s)\mathrm{d}s。\quad (5)$$

将式（5）整理可得式（3），引理 1 证毕。

注 1 基于文献 [1] 的引理 1，本文提出了一种新的自由矩阵积分不等式即引理 1。与文献 [1] 相比，本文简化了积分不等式即减小了不等式的维度（由四维简化为三维），并改变了增广向量$\boldsymbol{\vartheta}(\alpha,\beta)$的元素，即将$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x(s)\mathrm{d}s$替换为$\int_\alpha^\beta x(s)\mathrm{d}s$；而文献 [1] 的引理 1 适用于处理时滞系统，很难应用到采样数据系统中。

引理 2 Finsler’s 引理[12] 考虑向量$\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$，矩阵$G\in\mathbb{S}^{n\times n}$和$\boldsymbol{\Gamma}\in\mathbb{R}^{p\times n}$，且 rank($\boldsymbol{\Gamma}$)<$n$，以下不等式等价：

1）$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{\xi}<0$，$\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}=0$，$\boldsymbol{\xi}\neq 0$；

2）$\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}<0$。

式中$\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}$表示矩阵$\boldsymbol{\Gamma}$的正交补。

2 主要结果

利用本文提出的自由矩阵积分不等式，推导采样数据系统的稳定条件。为了简化表达，定义记号如下：

$$\boldsymbol{\chi}_1(t)=\left[x^{\mathrm{T}}(t)-x^{\mathrm{T}}(t_k),\ \int_{t_k}^t x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\chi}_2(t)=\left[x^{\mathrm{T}}(t_k),\ \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}(t)=\left[x^{\mathrm{T}}(t),\ x^{\mathrm{T}}(t_k),\ \int_{t_k}^t x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s,\ \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$e_i=[\mathbf{0}_{n\times(i-1)n},I_n,\mathbf{0}_{n\times(4-i)n}],\ i=1,2,3,4。$$

定理 1 对给定的正实数 $d_U\geqslant d_L>0$，如果存在正定的对称矩阵 $P\in\mathbb{S}_+^{n\times n}$，$Q_1\in\mathbb{S}_+^{2n\times 2n}$ 和矩阵 $Q_2\in\mathbb{R}^{2n\times n}$，$R=\begin{bmatrix}R_1 & R_2\\ * & R_3\end{bmatrix}>0$，以及任意矩阵 $X_1, X_2\in\mathbb{R}^{3n\times n}$，使得 LMIs 成立，即

$$\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}(\Xi_1+d_k\Xi_2)\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}<0,\quad (6)$$

$$\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\bar{\Xi}_3\boldsymbol{\Gamma}^{\perp} & d_k\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}H_5^{\mathrm{T}}X_1 & d_kd_U\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}H_5^{\mathrm{T}}X_2\\ * & -d_kR_3 & \mathbf{0}\\ * & * & -3d_kR_3\end{bmatrix}<0,\quad (7)$$

则系统（2）是渐进稳定的。

式（6）~（7）中：

$$\Xi_1=\mathrm{Sym}\left\{\left[e_1^{\mathrm{T}}Pe_4-H_1^{\mathrm{T}}Q_2e_2-e_2^{\mathrm{T}}R_2H_2\right]\right\}-H_1^{\mathrm{T}}Q_1H_1+\Theta;$$

$$\Xi_2=\mathrm{Sym}\left\{\left[H_1^{\mathrm{T}}Q_1H_3+H_3^{\mathrm{T}}Q_2e_2\right]\right\}+H_4^{\mathrm{T}}RH_4;$$

$$\Xi_3=-e_2^{\mathrm{T}}R_1e_2+\Theta_1;$$

$$\bar{\Xi}_3=-e_2^{\mathrm{T}}R_1e_2+H_5^{\mathrm{T}}\mathrm{Sym}\{[X_2,X_2,0]\}H_5;$$

$$H_1=[e_1^{\mathrm{T}}-e_2^{\mathrm{T}},e_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$H_2=[e_1^{\mathrm{T}}-e_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$H_3=[e_4^{\mathrm{T}},e_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$H_4=[e_2^{\mathrm{T}},e_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$H_5=[e_1^{\mathrm{T}},e_2^{\mathrm{T}},e_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}};$$

$$\Theta_1=H_5^{\mathrm{T}}\left(X_1R_3^{-1}X_1^{\mathrm{T}}+\frac{d_U^2}{3}X_2R_3^{-1}X_2^{\mathrm{T}}\right)H_5+H_5^{\mathrm{T}}\mathrm{Sym}\{[X_2,X_2,\mathbf{0}]\}H_5;$$

$$\Theta_2=H_5^{\mathrm{T}}\mathrm{Sym}\{[X_1,-X_1,-2X_2]\}H_5。$$

证明 取 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下：

$$V(x_t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+(t_{k+1}-t)\boldsymbol{\chi}_1^{\mathrm{T}}(t)Q_1\boldsymbol{\chi}_1(t)+2(t_{k+1}-t)\boldsymbol{\chi}_1^{\mathrm{T}}(t)Q_2x(t_k)+(t_{k+1}-t)\times\int_{t_k}^t\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}(s)R\boldsymbol{\chi}_2(s)\mathrm{d}s。\quad (8)$$

计算 $V(x_t)$ 沿系统（2）的轨迹导数，有

$$\dot{V}(x_t)=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\mathrm{Sym}\left\{\left[e_1^{\mathrm{T}}Pe_4-H_1^{\mathrm{T}}Q_2e_2-e_2^{\mathrm{T}}R_2H_2\right]\right\}-H_1^{\mathrm{T}}Q_1H_1-(t-t_k)e_2^{\mathrm{T}}R_1e_2+(t_{k+1}-t)\times\left(\mathrm{Sym}\left\{\left[H_1^{\mathrm{T}}Q_1H_3+H_3^{\mathrm{T}}Q_2e_2\right]\right\}+H_4^{\mathrm{T}}RH_4\right)\Big]\times\boldsymbol{\eta}(t)-\int_{t_k}^t\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{x}(s)\mathrm{d}s。\quad (9)$$

用引理 2 估计式（9）中的一次积分项，可得

$$-\int_{t_k}^t\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_3\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\Big[(t-t_k)H_5^{\mathrm{T}}\times\left(X_1R_3^{-1}X_1^{\mathrm{T}}+\frac{(t-t_k)^2}{3}X_2R_3^{-1}X_2^{\mathrm{T}}\right)H_5+(t-t_k)H_5^{\mathrm{T}}\mathrm{Sym}\{[X_2,X_2,\mathbf{0}]\}H_5+H_5^{\mathrm{T}}\mathrm{Sym}\{[X_1,-X_1,-2X_2]\}H_5\Big]\boldsymbol{\eta}(t)\leqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left((t-t_k)\Theta_1+\Theta_2\right)\boldsymbol{\eta}(t)。\quad (10)$$

结合式（9）和（10），有

$$\dot{V}(x_t)\leqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left(\Xi_1+(t_{k+1}-t)\Xi_2+(t-t_k)\Xi_3\right)\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{t_{k+1}-t}{d_k}(\Xi_1+d_k\Xi_2)+\frac{t-t_k}{d_k}(\Xi_1+d_k\Xi_3)\right)\boldsymbol{\eta}(t)。\quad (11)$$

又因为

$$\Xi_1+d_k\Xi_2=\frac{d_U-d_k}{d_U-d_L}(\Xi_1+d_L\Xi_2)+\frac{d_k-d_L}{d_U-d_L}(\Xi_1+d_U\Xi_2),$$

$$\Xi_1+d_k\Xi_3=\frac{d_U-d_k}{d_U-d_L}(\Xi_1+d_L\Xi_3)+\frac{d_k-d_L}{d_U-d_L}(\Xi_1+d_U\Xi_3)。\quad (12)$$

因此，根据引理 2，若有$\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}=0$，则线性矩阵不等式（6）和$\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}(\Xi_1+d_k\Xi_3)\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}<0$等价于$\dot{V}(x_t)<0$。使用 Schur 补引理，线性矩阵不等式（7）等价于$\left(\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}(\Xi_1+d_k\Xi_3)\boldsymbol{\Gamma}^{\perp}<0$。也就是说，如果式（6）和式（7）成立，则有$\dot{V}(x_t)<0$，也就意味着采样数据

系统（2）是渐近稳定的，证毕。

3 数值算例

考虑采样数据系统（2），具有如下矩阵参数。

例 1 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-2\\ -2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

例 2 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-3.75\\ -11.5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

例 3 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_K=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}$。

例 4 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_K=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$。

当 $d_L=10^{-5}$ 时，利用提出的稳定判据即定理 1 获得 4 个算例的最大采样时间间隔，见表 1。由定理 1 得到的最大采样时间间隔优于与文献 [6]，[8] 和 [9]，这说明本文方法具有一定的优越性。

表 1　当 $d_L=10^{-5}$ 时的最大容许上界 d_U

Table 1　The maximum allowable bounds with d_U hen $d_L=10^{-5}$

方法	d_U			
	例 1	例 2	例 3	例 4
解析解	1.098 7	1.729 5	3.269 0	∞
文献 [6]	0.999 9	1.698 1	2.515 6	1.641 0
文献 [8]	1.058 5	1.721 6	2.515 6	1.654 5
文献 [9]	1.060 0	1.725 0		1.690 0
定理 1	1.074 3	1.729 2	2.515 6	1.683 3

4 结语

本文讨论了线性采样数据系统的稳定性问题，构造了时间相关连续 Lyapunov-Krasovskii 泛函，提出了一种新的自由矩阵积分不等式，利用它估计 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数，得到采样数据系统的稳定判据。数值实例证明了本文所提方法的有效性和可行性。

参考文献：

[1] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. New Results on Stability Analysis for Systems with Discrete Distributed Delay[J]. Automatica，2015，60(C)：189−192.

[2] YE H，MICHEL A N，HOU L. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，1998，43(4)：461−474.

[3] ZENG H B，JU H P，XIAO S P，et al. Further Results on Sampled-Data Control for Master-Slave Synchronization of Chaotic Lur’e Systems with Time Delay[J]. Nonlinear Dynamics，2015，82(1)：851−863.

[4] FUJIOKA H. A Discrete-Time Approach to Stability Analysis of Systems with Aperiodic Sample-and-Hold Devices[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2009，54(10)：2440−2445.

[5] NAGHSHTABRIZI P，HESPANHA J P，TEEL A R. Stability of Delay Impulsive Systems with Application to Networked Control Systems[C]//Proceedings of the American Control Conference(2007). [S. l.]：IEEE，2007，32(5)：4899−4904.

[6] FRIDMAN E. A Refined Input Delay Approach to Sampled-Data Contro[J]. Automatica，2010，46(2)：421−427.

[7] SEURET A，GOUAISBAUT F. Wirtinger-Based Integral Inequality：Application to Time-Delay Systems[J]. Automatica，2013，49(9)：2860−2866.

[8] SEURET A. A Novel Stability Analysis of Linear Systems Under Asynchronous Samplings[J]. Automatica，2012，48(1)：177−182.

[9] KAO C Y. An IQC Approach to Robust Stability of Aperiodic Sampled-Data Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2016，61(8)：2219−2225.

[10] 王　炜，周维龙 . 不确定采样系统的鲁棒镇定控制器设计 [J]. 湖南工业大学学报，2015，29(2)：50−53.
WANG Wei，ZHOU Weilong. A Design of Robust Stabilization Controller for Uncertain Sampled-Data System[J]. Journal of Hunnan University of Technology，2015，29(2)：50−53.

[11] 王　炜，曾红兵 . 不确定线性采样系统的鲁棒稳定性 [J]. 湖南工业大学学报，2010，24(4)：79−81.
WANG Wei，ZENG Hongbing. Robust Stability of Uncertain Linear Sampling Systems[J]. Journal of Hunnan University of Technology，2010，24(4)：79−81.

[12] SKELTON R E，IWASAKI T，GRIGORADIS K M. A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design[M]. New York：Taylor and Francis，1997：25−79.

（责任编辑：邓　彬）