

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2016.05.017

离散型 Lotka–Volterra 捕食 – 被捕食系统的 Marotto 混沌

陈先伟¹, 申靖²

(1. 湖南科技大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411201; 2. 湖南工业大学 财经学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 研究了离散型捕食 – 被捕食 Lotka-Volterra 系统的 Marotto 意义下的混沌。通过理论分析给出了系统存在 Marotto 意义下的混沌的条件, 并利用分支图、最大 Lyapunov 指数 (ML)、分形维 (FD)、相图进行了数值模拟, 验证了理论分析的正确性, 同时展示了此系统的复杂动力学行为。结合已有的结论, 有利于学者们更完整地理解此类系统的动力学行为。

关键词: 捕食与被捕食系统; Marotto 混沌; 最大 Lyapunov 指数 (ML); 分形维 (FD)

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2016)05-0087-05

Marotto Chaos in a Discrete Lotka-Volterra Predator-Prey System

CHEN Xianwei¹, SHEN Jing²

(1. School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China; 2. School of Finance and Economics, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract : Marotto chaos in a discrete Lotka-Volterra predator-prey system has been investigated in this paper. A theoretical analysis has been made of the conditions under which Marotto chaos exists with numerical simulations conducted on the bifurcation diagrams, maximum Lyapunov exponents (ML), fractal dimensions (FD), and phase portraits, thus verifying the validity of the theoretical analysis, and displaying the complex dynamical behaviors of this system as well. Combined with the existing conclusions, a more complete understanding of the dynamical behaviors of this system will be obtained for subsequent researchers.

Keywords : predator-prey system; Marotto chaos; maximum Lyapunov exponents (ML); fractal dimensions (FD)

1 研究背景

经典的捕食 – 被捕食 Lotka-Volterra 系统^[1-2]为

$$\begin{cases} \dot{X} = r_0 X \left(1 - \frac{X}{k}\right) - b_0 XY, \\ \dot{Y} = (-d_0 + cX)Y. \end{cases} \quad (1)$$

式中: X, Y 分别为被捕食者与捕食者的密度;

r_0 为内在增长率;

k 为人口承载能力;

b_0 为捕食函数, 表示每个捕食者在单位时间、单位面积所消耗被捕食者的数量;

d_0 为捕食者的死亡率;

收稿日期: 2016-07-15

基金项目: 湖南省教育厅高校科研基金资助项目 (15C0537)

作者简介: 陈先伟 (1978-), 男, 湖南浏阳人, 湖南科技大学副教授, 主要研究方向为微分方程动力系统的分支与混沌,

E-mail: chenxianwei11@aliyun.com

通信作者: 申靖 (1982-), 女, 湖南怀化人, 湖南工业大学讲师, 主要研究方向为经济数学,

Email: shenjing41@aliyun.com

c 为被捕食者转化为捕食者的转化率;
 cXY 为捕食者数量函数。

当 $Y=0$ 时, 不含捕食者的系统 (1) 被学者们广泛研究, 并得到了一些有趣的结论^[1-3]。例如当参数 r_0 和 k 在其允许范围内取值, 若 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统 (1) 的所有非负解 (常数解除外) 收敛于常数解 $X=k$, 即 $X(t)$ 值随着时间发展趋向于极限 k 。当 $Y \neq 0$ 时, 关于捕食-被捕食 Lotka-Volterra 模型 (1) 的研究也较多, 学者们主要集中研究了该系统的不动点的稳定性、周期性和一些随机行为^[1, 4-10]。

为了方便, 引入变量 $x = \frac{X}{k}, y = \frac{b_0 Y}{ck}$ 和 $s = \frac{t}{k}$, 并取 $r = r_0 k, b = k^2 c, d = d_0 k$, 则系统 (1) 变为

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1-x) - bxy, \\ \dot{y} = (-d + bx)y. \end{cases} \quad (2)$$

将欧拉方法^[11-13]应用于系统 (2), 可得

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + \delta [rx(1-x) - bxy] \\ y + \delta (-d + bx)y \end{pmatrix}, \quad (3)$$

式中 δ 为步长。

关于系统 (3) 的不动点及其分支已有研究, 并得到了系统 (3) 在 \mathbf{R}_+^2 空间上产生 flip-分支和 Hopf-分支的条件^[14]。

虽然关于系统 (3) 的混沌研究较少, 但生态系统中混沌现象是一个值得研究的问题。

2 Marotto 意义下的混沌存在性

下面对系统 (3) 存在 Marotto 意义下的混沌^[15-16]进行讨论, 系统 (3) 的不动点的稳定性见引理 1。

引理 1^[14] i) 对于任意的参数值, 系统 (3) 总有两个不动点 $O(0, 0)$ 和 $A(1, 0)$;

ii) 如果 $b > d$, 则系统 (3) 有另一个正的不动点 $Z_0(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 = \frac{d}{b}, y_0 = \frac{r(b-d)}{b^2}$ 。

因为不动点 $O(0, 0)$ 和 $A(1, 0)$ 的特征值都是实数, 所以 Marotto 意义下的混沌仅在正不动点 $Z_0(x_0, y_0)$ 处发生。

为了使系统 (3) 的不动点 $Z_0(x_0, y_0)$ 为扩张-拉回点^[15], 首先计算系统 (3) 在不动点 $Z_0(x_0, y_0)$ 处的雅可比矩阵 J , 经简单计算得

$$J = \begin{pmatrix} 1+r\delta-2r\delta x_0-b\delta y_0 & -b\delta x_0 \\ b\delta y_0 & 1-d\delta+b\delta x_0 \end{pmatrix}$$

雅可比矩阵 J 所对应的特征方程表示为

$$\lambda^2 + p(x_0, y_0)\lambda + q(x_0, y_0) = 0 \quad (4)$$

式中: $p(x, y) = -2 + d\delta - r\delta + (2r\delta - b\delta)x + b\delta y$;

$$q(x, y) = b^2\delta^2 xy + (1+r\delta-2r\delta x-b\delta y)(1-d\delta+b\delta x)。$$

不动点 $Z_0(x_0, y_0)$ 对应的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p(x_0, y_0) \pm \sqrt{p^2(x_0, y_0) - 4q(x_0, y_0)}}{2}$$

根据扩张-拉回点的定义可知, 只需找不动点 Z_0 的一个邻域 $B_r(Z_0)$, 当 $Z \in B_r(Z_0)$ 时, 其特征值的模大于 1, 即

$$\begin{cases} p^2(x, y) - 4q(x, y) < 0, \\ q(x, y) - 1 > 0. \end{cases}$$

设 $S_1(x, y) = p^2(x, y) - 4q(x, y)$, 则

$$S_1(x, y) = \delta^2 \left[b^2(x-y)^2 + 4b(x+y) \left(\left(x - \frac{1}{2} \right) r - \frac{1}{2} d \right) + 4 \left(r \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} d \right)^2 \right]。$$

如果 $\Delta_1 = -2brx^2 + brx + bdx \geq 0$, 则以 y 为变量的方程 $S_1(x, y) = 0$ 有 1 个二重实根或 2 个实根, 2 个实根分别为

$$y_1 = \frac{bx - 2rx + r + d - 2\sqrt{-2brx^2 + brx + bdx}}{b},$$

$$y_2 = \frac{bx - 2rx + r + d + 2\sqrt{-2brx^2 + brx + bdx}}{b}。$$

根据 $\Delta_1 = -2brx^2 + brx + bdx \geq 0$, 可得

$$0 \leq x \leq \frac{r+d}{2r}。$$

因此, 如果 $0 \leq x \leq \frac{r+d}{2r}$ 和 $y \in (y_1, y_2)$ 成立, 则有 $S_1(x, y) < 0$ 。

设 $S_2(x, y) = q(x, y) - 1$, 则

$$S_2(x, y) = -2r\delta^2 bx^2 + (b\delta + 2r\delta^2 d + rb\delta^2 - 2r\delta)x - d\delta + bd\delta^2 y + r\delta - rd\delta^2 - b\delta y_0。$$

如果

$$\Delta_2 = (b\delta + 2r\delta^2 d + rb\delta^2 - 2r\delta)^2 -$$

$$8br\delta^2 (-d\delta + bd\delta^2 y + r\delta - rd\delta^2 - b\delta y) \geq 0,$$

则以 x 为变量的方程 $S_2(x, y) = 0$ 有一个二重实根或两个不同实根, 两个实根分别为

$$x_1 = \frac{-2r\delta + b\delta + 2rd\delta^2 + br\delta^2 - \sqrt{\Delta_2}}{4br\delta^2},$$

$$x_2 = \frac{-2r\delta + b\delta + 2rd\delta^2 + br\delta^2 + \sqrt{\Delta_2}}{4br\delta^2}。$$

由 $\Delta_2 \geq 0$ 可得

$$\begin{cases} y \leq y^* = \frac{[2 + (b-2d)\delta]^2 r^2 + 2br[(b-2d)\delta - 2] + b^2}{8b^2 r \delta (1-d\delta)}, \\ 1-d\delta > 0; \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} y \geq y^* = \frac{[2 + (b - 2d)\delta]^2 r^2 + 2br[(b - 2d)\delta - 2] + b^2}{8b^2 r \delta (1 - d\delta)}, \\ 1 - d\delta < 0. \end{cases}$$

由此可得, $S_2(x, y) > 0$ 的充分条件是下列之一:

- 1) $1 - d\delta > 0, x \in (x_1, x_2)$ 且 $y \leq y^*$;
- 2) $1 - d\delta < 0, x \in (x_1, x_2)$ 且 $y \geq y^*$.

综合以上分析, 可得如下引理 2.

引理 2 如果以下条件之一成立:

i) $1 - d\delta > 0, x \in \left(0, \frac{r+d}{2r}\right) \cap (x_1, x_2)$, 且 $y \in (y_1, y_2) \cap (-\infty, y^*)$;

ii) $1 - d\delta < 0, x \in \left(0, \frac{r+d}{2r}\right) \cap (x_1, x_2)$, 且 $y \in (y_1, y_2) \cap (y^*, +\infty)$;

则 $p^2(x, y) - 4q(x, y) < 0, q(x, y) - 1 > 0$. 而且, 如果系统 (3) 的不动点 $Z_0(x_0, y_0)$ 满足

$$Z_0(x_0, y_0) \in B_r(Z_0) = \left\{ (x, y) \mid x \in \left(0, \frac{r+d}{2r}\right) \cap (x_1, x_2), y \in (y_1, y_2) \cap (-\infty, y^*) \right\},$$

或

$$Z_0(x_0, y_0) \in B_r(Z_0) = \left\{ (x, y) \mid x \in \left(0, \frac{r+d}{2r}\right) \cap (x_1, x_2), y \in (y_1, y_2) \cap (y^*, +\infty) \right\},$$

则 $Z_0(x_0, y_0)$ 是邻域 $B_r(Z_0)$ 中的一个扩张点.

根据扩张-拉回点的定义, 需要找一个点 $Z^*(x^*, y^*) \in B_r(Z_0)$ 使得 $Z^* \neq Z_0, F^M(Z^*) = Z_0$,

$|DF^M(Z^*)| \neq 0$ (D 表示求映射的雅可比矩阵算子), 其中 M 为某一正整数, F 如式 (3) 所定义. 如果 Z_0 是一个扩张拉回点, 则至少存在一个点 $Z^*(x^*, y^*) \in B_r(Z_0)$ 满足

$$\begin{cases} x^* \delta [rx^*(1-x^*) - bx^*y^*] = \bar{x}, \\ y^* + \delta(-d + bx^*)y^* = \bar{y}; \end{cases} \quad (5)$$

和

$$\begin{cases} \bar{x} \delta [r\bar{x}(1-\bar{x}) - b\bar{x}\bar{y}] = x_0, \\ \bar{y} + \delta(-d + b\bar{x})\bar{y} = y_0. \end{cases} \quad (6)$$

以下求解 $Z^*(x^*, y^*)$ 的值, 即解方程组 (5) 和 (6).

如果方程组 (5) 和 (6) 有解 $Z^*(x^*, y^*) \neq Z_0, Z_1(\bar{x}, \bar{y}) \neq Z_0(x_0, y_0)$, 则点 $Z^*(x^*, y^*)$ 经过两次映射到达 $Z_0(x_0, y_0)$. 设方程组 (6) 的解 $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (x_0, y_0)$ 必须满足

$$\begin{cases} \bar{x} \delta [r\bar{x}(1-\bar{x}) - b\bar{x}\bar{y}] = x_0, \\ \bar{y} + \delta(-d + b\bar{x})\bar{y} = y_0. \end{cases} \quad (7)$$

式中: $A = b^2 r \delta^2$;

$$B = -(b^2 \delta + b^2 r \delta^2 - br \delta + bdr \delta^2);$$

$$C = 2bd\delta - rd - b + br - br\delta + brd\delta^2;$$

$$D = d^2 \delta - d.$$

设 $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$, 经过简单计算, 可得方程组

(7) 的解的情况如下.

1) 如果 $\Delta > 0$, 方程组 (7) 有唯一 1 组解

$$\begin{cases} \bar{x} = \sqrt[3]{T + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{T - \sqrt{\Delta}}, \\ \bar{y} = \frac{r(b-d)}{b^2(1-d\delta + b\delta\sqrt[3]{T + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{T - \sqrt{\Delta}})}. \end{cases} \quad (8)$$

2) 如果 $\Delta = 0$, 方程组 (7) 有 2 组不同的解

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -\sqrt[3]{4q}, \\ \bar{y}_1 = \frac{r(b-d)}{b^2(1-d\delta + b\delta\sqrt[3]{4q})}; \end{cases} \quad (9)$$

和

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \frac{\sqrt[3]{4q}}{2}, \\ \bar{y}_2 = \frac{r(b-d)}{b^2(1-d\delta + b\delta\frac{\sqrt[3]{4q}}{2})}. \end{cases} \quad (10)$$

3) 如果 $\Delta < 0$, 方程组 (7) 有 3 组不同的解

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{2\sqrt{-3p}}{3} \cos \frac{\alpha}{3}, \\ \bar{y}_1 = \frac{r(b-d)}{b^2(1-d\delta + b\delta\bar{x}_1)}; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \frac{\sqrt{-3p}}{3} \left(\cos \frac{\alpha}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3} \right), \\ \bar{y}_2 = \frac{r(b-d)}{b^2(1-d\delta + b\delta\bar{x}_2)}; \end{cases} \quad (12)$$

和

$$\begin{cases} \bar{x}_3 = \frac{\sqrt{-3p}}{3} \left(\cos \frac{\alpha}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3} \right), \\ \bar{y}_3 = \frac{r(b-d)}{b^2(1-d\delta + b\delta\bar{x}_3)}. \end{cases} \quad (13)$$

式 (8) ~ (13) 中: $\alpha = \arccos \frac{-3q\sqrt{-3p}}{2p^2}$; $p = \frac{C}{A} - \frac{B^2}{3A^2}$;

$$q = \frac{D}{A} + \frac{2B^3}{27A^3} - \frac{BC}{3A^2}; T = -\frac{q}{2}.$$

将解 \bar{x} 和 \bar{y} 代入方程组 (5), 得

$$\begin{cases} A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1 = 0, \\ y^* = \frac{\bar{y}}{b^2(1-d\delta + b\delta x^*)}. \end{cases} \quad (14)$$

式中: $A = -br\delta^2$;

$$B_1 = b\delta + 2br\delta^2 - r\delta;$$

$$C_1 = 1 - d\delta + r\delta - dr\delta^2 - b\delta\bar{x} - b\bar{y};$$

$$D_1 = d\delta\bar{x} - \bar{x}.$$

方程组 (14) 的解同样可以由求解方程组 (7) 的方法得到, 不再重述。

显然, 如果引理 2 的条件满足, 同时方程组 (7) 和 (14) 的解满足:

$$Z^*(x^*, y^*) \neq Z_0(x_0, y_0),$$

$$Z_1(\bar{x}, \bar{y}) \neq Z_0(x_0, y_0),$$

$$Z^*(x^*, y^*) \in B_r(z_0),$$

$$|DF^2(Z^*)| \neq 0,$$

则 Z_0 在 $B_r(Z_0)$ 中是一个扩张拉回点。

因此, 可得如下定理 1。

定理 1 假设 $Z_0(x_0, y_0)$ 在 $B_r(Z_0)$ 中是一个扩张拉回点, 如果方程组 (7) 和 (8) 的解 (\bar{x}, \bar{y}) 和 (x^*, y^*) 满足 $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (x_0, y_0), (x^*, y^*) \neq (x_0, y_0), (x^*, y^*) \in B_r(z_0)$, 且 $|DF^2(Z^*)| \neq 0$, 则 $Z_0(x_0, y_0)$ 是系统 (3) 的一个扩张拉回点, 且系统 (3) 产生 Marotto 意义下的混沌。

下面给出满足定理 1 的条件的一个例子。

例 1 当 $b=2, d=0.65, r=3, \delta=1.014$ 时, 映射 (3) 有不动点 $Z_0(x_0, y_0) = (0.3250, 0.0125)$, 其对应的特征值为 $\lambda = 0.5057 \pm 1.0531i$ 。基于引理 2 和定理 1, 可得 Z_0 的一个邻域

$$U_r(Z_0) =$$

$$\{(x, y) | x \in (0.3037, 0.5526), y \in (0.1714, 1.6455)\} \subset$$

$$B_r(Z_0),$$

且存在一个点 $Z^*(x^*, y^*) = (0.4855, 0.3536)$, 满足

$$F^2(Z^*) = Z_0, \quad |DF^2(Z^*)| \approx -4.0553.$$

显然, $Z^* \in B_r(Z_0)$ 。因此, 点 Z_0 是一个扩张拉回点。

3 数值模拟

结合例 1, 通过分支图、最大 Lyapunov 指数 (maximum lyapunov exponents, ML)^[17]、分形维 (fractal dimensions, FD) 和相图来验证以上理论的正确性。

由 Lyapunov 指数定义的分形维^[17-18]如下

$$d_L = j + \frac{\sum_{i=1}^{j-1} L_i}{L_j},$$

式中: L_1, L_2, \dots, L_n 为 Lyapunov 指数;

j 是使得 $\sum_{i=1}^{j-1} L_i \geq 0, \sum_{i=1}^j L_i < 0$ 成立的最大整数。

捕食-被捕食系统为二维的, 其对应的分形维为

$$d_L = 1 + \frac{L_1}{|L_2|}, \quad L_1 > 0 > L_2.$$

根据例 1 的参数取值, 关于 Marotto 意义下的混沌验证如下。

当 $b=2, r=3, d=0.65, \delta=(0.0103, 1.0302)$, 初始值为 $(0.501, 0.751)$ 时, 系统 (3) 在 (δ, x) 平面上的分支图如图 1a 所示。与图 1a 对应的最大 Lyapunov 指数图如图 1b 所示。根据例 1 和定理 1 可知, 混沌吸引子位于混沌区域 $\delta=(0.0103, 1.0302)$ 。事实上, 当 $\delta=0.014$ 时, $Z_0(x_0, y_0) = (0.3250, 1.0125)$ 是映射 (3) 的不动点, 且可找到 Z_0 的区域

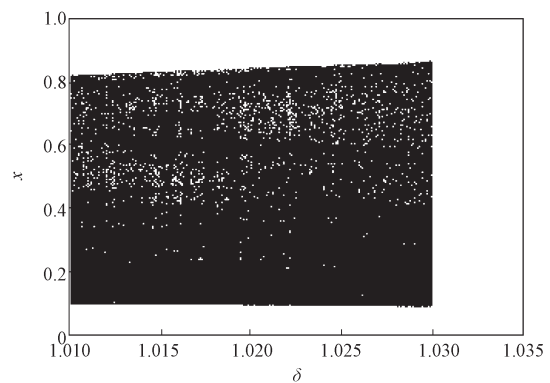
$$U_r(Z_0) =$$

$$\{(x, y) | x \in (0.3037, 0.5526), y \in (0.1714, 1.6455)\} \subset$$

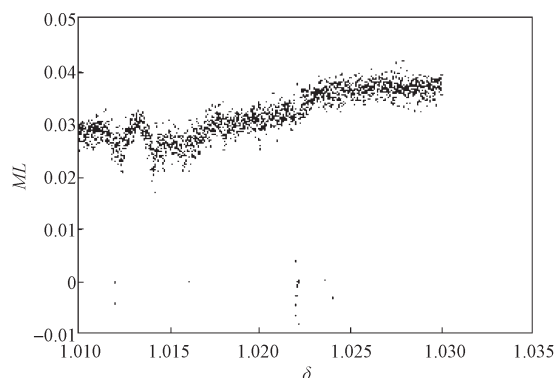
$$B_r(Z_0),$$

使得 Z_0 是一个扩张点, 同时存在 $Z^*(x^*, y^*) = (0.4855,$

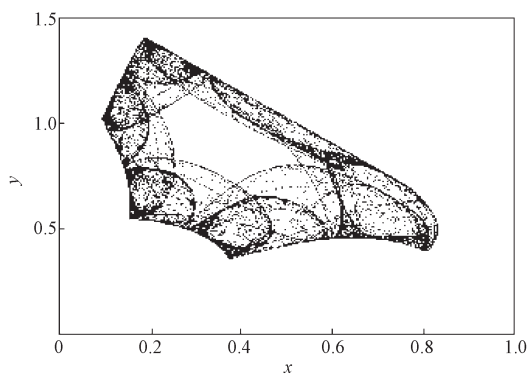
$0.3536)$, 使得 $F^2(Z^*) = Z_0$ 和 $|DF^2(Z^*)| \approx -4.0553 \neq 0$ 成立。因此, Z_0 是一个扩张拉回点。当 $\delta=1.014$ ($ML=0.0262, FD=1.8589$) 时, 其对应的 Marotto 混沌吸引子如图 1c 所示。因此验证了定理 1。



a) 分支图



b) 最大 Lyapunov 图



c) 混沌吸引子

图 1 映射 (3) 的数值模拟图。

Fig. 1 Numerical simulation diagram of mapping (3)

4 结语

通过对系统 (3) 的混沌分析, 根据 Marotto 意义下的混沌定义, 得到了 Marotto 意义下的混沌存在条件。利用分支图、最大 Lyapunov 指数、分形维和相图验证了理论的正确性。揭示了生态系统中, 捕食者与被捕食者数量发生巨变后又迅速回到平稳位置的复杂生态现象。分析结果对数学和生态学都很有意义, 再结合前人得到的结论, 可以更完整地理解捕食-被捕食系统。

参考文献:

- [1] BRAUER F, CASTILLO-CHAVEZ C. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology[M]. New York: Springer Verlag, 2001: 105-112.
- [2] FRODA S, NKURUNZIZA S. Prediction of Predator-Prey Populations Modelled By perturbed ODEs[J]. Journal of Mathematical Biology, 2007, 54(3): 407-451.
- [3] MURRAY J D. Mathematical Biology[M]. 2nd ed. Berlin: Springer Verlag, 1993: 85-112.
- [4] ROSENZWEIG M L, MACARTHUR R H. Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions[J]. The American Naturalist, 1963, 97(895): 209-223.
- [5] HOSSIAN ERJAE G, DANNAN F M. Stability Analysis of Periodic Solutions to the Nonstandard Discretized Model of the Lotka-Volterra Predator-Prey System[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(12): 4301-4308.
- [6] FREEDMAN H I. Deterministic Mathematical Models in Population Ecology[J]. Biometric, 1980, 22(7): 219-236.
- [7] HUANG Y, JIANG X M, ZOU X F. Dynamics in Numerics: On a Discrete Predator-Prey Model[J]. Differential Equations and Dynamical Systems, 2008, 16(1/2): 163-182.
- [8] LIU B, ZHANG Y J, CHEN L S. Dynamic Complexities in a Lotka-Volterra Predator-Prey Model Concerning Impulsive Control Strategy[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005, 15(2): 517-531.
- [9] TANG S Y, CHEN L S. The Periodic Predator-Prey Lotka-Volterra Model with Impulsive Effect[J]. Journal of Mechanics in Medicine and Biology, 2002, 2(3/4): 267-296.
- [10] WANG W D, LU Z Y. Global Stability of Discrete Models of Lotka-Volterra Type[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 1999, 35(8): 1019-1030.
- [11] JING Z J, Chang Y, Guo B L. Bifurcation and Chaos in Discrete FitzHugh-Nagumo System[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21(3): 701-720.
- [12] JING Z J, YANG J P. Bifurcation and Chaos in Discrete-Time Predator-Prey System[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 27(1): 259-277.
- [13] JING Z J, JIA Z Y, WANG R Q. Chaos Behavior in the Discrete BVP Oscillator[J]. Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 619-627.
- [14] LIU X L, XIAO D M. Complex Dynamic Behaviors of a Discrete-Time Predator-Prey System[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32(1): 80-94.
- [15] MAROTTO F R. Snap-Back Repellers Imply Chaos in Rn [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1978, 63(1): 199-223.
- [16] MAROTTO F R. On Redefining a Snap-Back Repeller[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(1): 25-28.
- [17] CARTWRIGHT J H E. Nonlinear Stiffness, Lyapunov Exponents, and Attractor Dimension[J]. Physics Letters A, 2000, 264(4): 298-302.
- [18] KAPLAN J L, YORKE J A. A Regime Observed in a Fluid Flow Model of Lorenz[J]. Communications in Mathematical Physics, 1979, 67(2): 93-108.

(责任编辑: 邓光辉)