doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2016.05.015

一类系数为三角模糊数的整数规划

周喜华[1]，黄晓红[1]，杨　娇[2]，邓胜岳[2]

（1. 广东环境保护工程职业学院 基础教育部，广东 佛山 528216；2. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：通过研究一类约束条件和目标系数中均含有三角模糊数的整数规划，利用模糊结构元理论，证明了一类系数为三角模糊数的整数规划的最优解等价于整数规划的最优解，得到了求解该模型的算法。通过算例验证了理论的正确性和算法的可行性。

关键词：三角模糊数；整数规划；模糊结构元

中图分类号：O221. 1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2016)05-0077-04

An Integer Programming with Coefficients Being a Class of Triangular Fuzzy Numbers

ZHOU Xihua[1]，HUANG Xiaohong[1]，YANG Jiao[2]，DENG Shengyue[2]

（1. Department of Basic Education，Guangdong Polytechnic of Environmental Protection Engineering，Foshan Guangdong 528216，China；2. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Based on the fact that both a class of integer programming constraints and objective coefficients contain triangular fuzzy numbers, a research has been conducted, by applying the fuzzy structured element theory, to successfully reach the conclusion that the optimal solution of a class of integer programming with triangular fuzzy number is equivalent to that of the integer programming, thus obtaining an effective algorithm for solving the model, verifying the validity of the theory and the feasibility of the algorithm with numerical examples.

Keywords：triangular fuzzy number；integer programming；fuzzy structured element

0　引言

整数规划是一类要求问题中的全部或部分变量为整数的线性规划。整数规划的历史可以追溯到古希腊数学家丢番图（Diophantine）对线性不定方程的整数解的研究。20世纪50年代，线性规划单纯形算法发现者Dantzig发现用0-1变量来描绘最优化模型中的固定用度、变量上界、半连续变量和非凸分片线性函数等。经过50多年的发展，整数规划的理论和算法得到了很大的发展，并且整数规划模型能有效地处理科学技术、工程研究、资源分配和营运管理等各种领域中的最优化问题。但是在实际生活中存在很多不确定现象，对于该类问题的建模得到了许多专家、学者的关注。针对具有模糊变量的模糊整数规划问题，H. J. Zimmermann[1]提出了模糊整数规划对称模型的解法；F. Herrera等[2]提出了模糊整数线性规划的3种模型，并提出了基于模糊数的表示定理及模糊数排序的算法。而针对模糊数的排序一直是模糊数学中的难点，自20世纪70年代以来，就有很多人提出了关于模糊数的比较和排序的方法。

收稿日期：2016-07-20

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2016JJ2043），湖南省教育厅科学研究基金资助项目（16C0472，15C0537）

作者简介：周喜华（1979-），男，湖南岳阳人，广东环境保护工程职业学院讲师，主要研究方向为线性系统理论，模糊数学，E-mail：576601525@qq.com

例如：Chen L. H.等[3]提出了用左、右优势度作为排序指标；P. A. D. Raj 等[4]提出了使用极大和极小集，通过模糊权重进行选择排序的方法；L. Tran 等[5]研究了用模糊间隔测度进行排序的方法；Liu X. W.等[6]验证了通过优先权重函数的数学期望进行模糊数排序的方法；而B. Asady 等[7]却是通过定义模糊数的最近点从而对模糊数进行排序；郭嗣琮[8-9]提出了模糊结构元的概念，并且给出了模糊数的结构元表示方法，还得到了[-1, 1]上同序标准单调函数类与有界实模糊数的同胚性质，这表明一个有界实模糊数与一个[-1, 1]上的标准单调有界函数是一一对应的，因而模糊数间的排序关系也可由对应的单调函数间的序关系示意。但至今还没有一个方法被公认是最佳的。

针对具有系数为模糊数的整数规划问题，本文根据模糊结构元理论，定义了模糊数结构元加权排序，基于有界实模糊数的排序等价于一个[-1, 1]上的标准单调有界函数的排序，并给出了基于模糊结构元理论的模糊数的排序方法。通过结构元加权排序，将一类系数为三角模糊数的整数规划的最优解等价于整数规划的最优解。这可为模糊整数规划的求解提供一种新的思路和方法。

1 模糊结构元理论

先介绍模糊结构元的表示方法和模糊数的结构元加权序的相关知识。

定义 1[10] 设 E 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集合，而隶属函数记为 $E(x)$，$x\in\mathbf{R}$。如果满足如下性质：

1）$E(0)=1$；

2）在区间$[-1,0)$上 $E(x)$是单增右连续函数，在区间$(0,1]$上是单降左连续函数；

3）当$x<-1$或者$x>1$时，$E(x)=0$。

则称 E 为 $\mathbf{R}$ 上的模糊结构元。

定义 2[10] 若结构元 E 满足：

1）$x\in(-1, 1)$, $E(x)>0$;

2）$E(x)$连续，且在$[-1,0)$上严格单增，在$(0,1]$上严格单降，则称 E 为正则模糊结构元。

定义 3[10] 若 $E(-x)=E(x)$，则称 E 为对称模糊结构元。

引理 1[10] 设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的任意模糊结构元，$E(x)$具有隶属函数，$f(x)$是$[-1,1]$上的单调有界函数，则$f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上有界闭模糊函数；反之，对于给定的正则模糊结构元 E 和任意的有界闭模糊数$\tilde{A}$，总存在一个在$[-1,1]$上的单调有界函数f，使得$\tilde{A}=f(E)$，那么称模糊数$\tilde{A}$是由模糊结构元 E 生成的。

引理 2[10] 若模糊数$\tilde{A}=f(E)$，则$\tilde{A}$的隶属函数为$E\left(f^{-1}(x)\right)$，这里$f^{-1}(x)$是$f(x)$关于变量x和y的轮换对称函数（若$f(x)$是连续严格单调的，则$f^{-1}(x)$是$f(x)$的反函数）。

引理 3[11] 若任意有界三角模糊数$\tilde{A}=(a,b,c)$，E为三角模糊结构元

$$E(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \tag{1}$$

则根据 E 可得到

$$f(x)=\begin{cases}(b-a)x+b, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -(b-c)x+b, & 0<x\leqslant 1,\end{cases} \tag{2}$$

因此$\tilde{A}=f(E)$。

引理 4[10] 设 E 是对称的模糊结构元，f_1，f_2 是$[-1,1]$上的同序单调函数，模糊数$\tilde{A}_1=f_1(E)$, $\tilde{A}_2=f_2(E)$，则有：

$$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=f_1(E)+f_2(E),$$
$$\tilde{A}_1-\tilde{A}_2=f_1(E)+f_2^{\tau}(E),$$
$$k\tilde{A}_1=|k|f_1^{\tau}(E)。$$

其中，当$k\geqslant 0$时，$f_i^{\tau}(E)=f_i(E)(i=1,2)$；当$k<0$时，$f_i^{\tau}(E)=-f_i(-E)$。

定义 4[12] 设有界模糊数$\tilde{A}$的结构元表示为$\tilde{A}=f(E)$，其中 E 为某确定的模糊结构元，f 为$[-1,1]$上的单调函数，记

$$\|A\|=\int_{-1}^{1}E(x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

则称$\|A\|$为有界模糊数$\tilde{A}$的结构加权特征数，简称为$\tilde{A}$的特征数。

记$\tilde{A}=(a,b,c)$，$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$，称$\tilde{A}$为三角模糊数。其隶属函数

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-b+a)}{a}, & b-a\leqslant x\leqslant b;\\ \dfrac{(b+c-x)}{c}, & b<x\leqslant b+c;\\ 0, & \text{其他}。\end{cases} \tag{4}$$

易计算三角模糊数$\tilde{A}=(a,b,c)$的特征数为

$$\|A\|=\int_{-1}^{1}E(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(a+4b+c)。 \tag{5}$$

如果$\tilde{A}=(a, a, a)=a$，即$\tilde{A}$为明确的实数时，则$\|a\|=a$。

引理 5[12] 设$\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2\in\tilde{N}_C(\mathbf{R})$（其中$\tilde{N}_C(\mathbf{R})$为 $\mathbf{R}$ 上全体有界闭模糊数），其结构元表达形式分别为

$\tilde{A}_i = f_i(E)$，$i=1,2$，其中 E 是给定的某个正则模糊结构元，隶属函数为 $E(x)$，f_1,f_2 是 $[-1,1]$ 上的同序单调函数（具有相同单调性的函数），则由式

$$\tilde{A}_1 \leqslant \tilde{A}_2 \Leftrightarrow F(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=\int_{-1}^{1} E(x)\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{6}$$

确定的关系“≤”为 $\tilde{N}_C(\mathbf{R})$ 上的全序，称之为模糊数的结构元加权序。

引理 6[12]　对于任意的三角模糊数 $\tilde{A}_1=(a_1,b_1,c_1)$，$\tilde{A}_2=(a_2,b_2,c_2)$，如果有 $\tilde{A}_1 \leqslant \tilde{A}_2$，就有

$$\frac{1}{6}(4b_1+a_1+c_1) \leqslant \frac{1}{6}(4b_2+a_2+c_2)。 \tag{7}$$

2　系数为三角模糊数的整数规划及其算法

2.1　系数为三角模糊数的整数规划模型与证明

考虑系数为三角模糊数的整数规划模型为

$$\max \tilde{z}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j \leqslant \tilde{b}_i\ (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,m),\ x_j \text{为整数。}\end{cases} \tag{8}$$

式中 $\tilde{z},\tilde{a}_{ij},\tilde{b}_i,\tilde{c}_j$ 均为三角模糊数值。

定理 1　设 $\tilde{z}=G(E)$，$\tilde{c}_j=h_j(E)$，$\tilde{a}_{ij}=f_{ij}(E)$，$\tilde{b}_i=g_i(E)$，$M=\int_{-1}^{1}E(x)G(x)\mathrm{d}x$，若 E 是正则对称模糊结构元，$G(x)$，$h_j(x)$，$f_{ij}(x)$，$g_i(x)$ 是 $[-1,1]$ 上同序单调函数，则模型（8）等价于下述模型

$$\max M=\sum_{j=1}^{n}x_j\int_{-1}^{1}E(x)h_j(x)\mathrm{d}x;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_j\int_{-1}^{1}E(x)f_{ij}(x)\mathrm{d}x \leqslant \\ \qquad\int_{-1}^{1}E(x)g_i(x)\mathrm{d}x\ (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,m),\ x_j \text{为整数。}\end{cases} \tag{9}$$

证　由引理 5 可知，衡量模糊数 $\tilde{z}$ 的大小，可以比较其所对应的 $M=\int_{-1}^{1}E(x)G(x)\mathrm{d}x$ 的大小。所以模型（8）中求解 $\tilde{z}$ 的最大化等价于 M 的最大化，由引理 1 可以得到

$$\tilde{z}=G(E)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j x_j=\sum_{j=1}^{n}h_j(E)x_j。$$

因为 $G(x)$，$h_j(x)$ 是同序单调函数，则

$$M=\int_{-1}^{1}E(x)G(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{-1}^{1}E(x)\sum_{j=1}^{n}h_j(x)x_j\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\int_{-1}^{1}E(x)h_j(x)\mathrm{d}x。$$

根据引理 3 和引理 4 可得

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\int_{-1}^{1}E(x)f_{ij}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1}E(x)g_i(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\max M=\sum_{j=1}^{n}x_j\int_{-1}^{1}E(x)h_j(x)\mathrm{d}x;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_j\int_{-1}^{1}E(x)f_{ij}(x)\mathrm{d}x \leqslant \\ \qquad\int_{-1}^{1}E(x)g_i(x)\mathrm{d}x\ (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j \geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,m),\ x_j \text{为整数。}\end{cases}$$

证毕。

2.2　算法

本文算法描述如下：

第一步　本文讨论的是三角模糊数，根据引理 3 所述，得到结构元 E 的表达式，并由

$$\mu_A(x)=E\left(f^{-1}(x)\right),$$

求出 $G(x)$，$h_j(x)$，$f_{ij}(x)$，$g_i(x)$；

第二步　计算

$$\int_{-1}^{1}E(x)h_j(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-1}^{1}E(x)f_{ij}(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-1}^{1}E(x)g_i(x)\mathrm{d}x,$$

并代入模型（9）；

第三步　根据定理 1 将系数为三角模糊数的整数规划问题（8）转化为整数规划问题（9）；

第四步　根据整数规划模型的解法，得到模型（9）的最优解，并将模型（9）的最优解代入模型（8）中，得到系数为三角模糊数的整数规划问题（8）的最优解。

3　算例

例 1　某药厂加工生产甲、乙 2 种药品，甲种药品每千克利润 3 元，乙种药品每千克利润 2 元。生产每千克甲药品需要原材料 A 约 2 kg，需要原材料 B 约 1 kg；生产每千克乙药品需要原材料 A 约 3 kg，需要原材料 B 约 0.5 kg。现有原材料 A 约 15 kg，原材料 B 约 4 kg，问应如何安排甲、乙两种药品的产量为整数且能使利润最大化？其中三角模糊数 $\widetilde{0.5}=(0.5,0.5,0.5)$，$\tilde{1}=(0.5,1,1.5)$，$\tilde{2}=(0,2,4)$，$\tilde{3}=(2,3,4)$，$\tilde{4}=(2,4,9)$，$\widetilde{15}=(8,15,16)$。

解　设甲、乙 2 种药品的产量分别为 x_1,x_2 kg，则该问题的数学模型为：

$$\max \tilde{z} = \tilde{3}x_1 + \tilde{2}x_2;$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \tilde{2}x_1 + \tilde{3}x_2 \leqslant \widetilde{15}, \\ \tilde{1}x_1 + \widetilde{0.5}x_2 \leqslant \tilde{4}, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \text{是整数。} \end{cases}$$

第一步 根据引理3所述，得到结构元 E 的表达式为

$$E(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1-x, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

则三角模糊数对应的函数如下：

$$f_{\widetilde{0.5}}(x) = 0.5;$$

$$f_{\tilde{1}}(x) = \begin{cases} 1+0.5x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1+0.5x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$f_{\tilde{2}}(x) = \begin{cases} 2+2x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2+2x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$f_{\tilde{3}}(x) = \begin{cases} 3+x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 3+x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$f_{\tilde{4}}(x) = \begin{cases} 4+2x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 4+5x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$f_{\widetilde{15}}(x) = \begin{cases} 15+7x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 15+x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

易得：$\widetilde{0.5} = f_{\widetilde{0.5}}(x), \tilde{1} = f_{\tilde{1}}(x), \tilde{2} = f_{\tilde{2}}(x), \tilde{3} = f_{\tilde{3}}(x), \tilde{4} = f_{\tilde{4}}(x), \widetilde{15} = f_{\widetilde{15}}(x)$。

第二步

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\tilde{0}}(x) \mathrm{d}x = 0;$$

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\widetilde{0.5}}(x) \mathrm{d}x = 0.5;$$

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\tilde{1}}(x) \mathrm{d}x = 1;$$

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\tilde{2}}(x) \mathrm{d}x = 2;$$

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\tilde{3}}(x) \mathrm{d}x = 3;$$

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\tilde{4}}(x) \mathrm{d}x = 4.5;$$

$$\int_{-1}^{1} E(x) f_{\widetilde{15}}(x) \mathrm{d}x = 14。$$

第三步 根据定理1，将第二步计算的结果代入原问题，则原问题等价于下述问题：

$$L_0: \max M = 3x_1 + 2x_2;$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ x_1 + 0.5x_2 \leqslant 4.5, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \\ x_1, x_2 \text{是整数。} \end{cases}$$

第四步 使用LINGO软件编制程序，计算得到该问题的最优解，且最优解是：$x_1=4$，$x_2=1$，$M=14$，$\tilde{z} = (\underline{z}, z, \overline{z}) = (8, 14, 20)$。即：安排药品甲的产量为4 kg左右、药品乙的产量为1 kg左右，利润最大为14元左右。

通过以上算例的分析和计算可知，利用模糊数结构元理论能有效地解决系数为三角模糊数的整数规划问题，并为模糊整数规划的解决提供了一种新的途径。

5 结语

现实世界中诸多事物存在不确定性，给决策者估量事物的目标函数以及约束条件的系数的确切值，带来了较大的困难，因此对这类规划问题的研究具有重要的理论和实际意义。本文讨论了一类系数为三角模糊数的整数规划，使用模糊结构元理论中的有界实数在[-1,1]上单调的性质，给出了模糊结构元加权排序的定义，将模糊数的排序转化为单调函数的比较，从而将一类系数为三角模糊数的整数规划的最优解，转化为整数规划的最优解。该方法不仅对于解决现实世界中广泛存在的模糊递阶决策问题具有实际意义，而且可为规划问题进一步的理论研究提供基础。

参考文献：

[1] ZIMMERMANN H J. Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions[J]. Fuzzy Sets and Systems，1978，1(1)：45-55.

[2] HERRERA F，VERDEGAY J L. Three Models of Fuzzy Integer Linear Programming[J]. European Journal of Operational Research，1995，83(3)：581-593.

[3] CHEN L H，LU H W. An Approximate Approach for Ranking Fuzzy Numbers Based on Left and Right Dominance [J]. Computers and Mathematics with Applications，2001，41(12)：1589-1602.

[4] RAJ P A D，KUMAR D N. Ranking Alternatives with Fuzzy Weights Using Maximizing Set and Minimizing Set [J]. Fuzzy Sets and Systems，1999，105(3)：365-375.

（下转第86页）