doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2016.05.008

# 基于自由矩阵不等式方法的中立型时滞系统稳定判据

练红海，肖伸平，陈　刚，陈海东

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007）

**摘　要**：针对一类不确定中立型时滞系统的鲁棒稳定性问题，采用自由矩阵积分不等式（FMBII）方法进行深入研究。提出了一种简化的FMBII，利用它估计Lyapunov-Krasovskii泛函的导数，得到具有更低保守性的时滞相关稳定判据。最后，通过2个数值实例，将本文方法与文献[4], [5], [7], [8]所提方法进行比较。数值实例结果表明了本文方法的有效性和优越性。

**关键词**：自由矩阵积分不等式；中立型时滞系统；稳定性

**中图分类号**：TP13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2016)05-0037-04

# Stability Criteria for Neutral Delay Systems Based on Free Matrix Inequalities

LIAN Honghai，XIAO Shenping，CHEN Gang，CHEN Haidong

（School of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

**Abstract**：In view of the robust stability exhibited by an uncertain neutral system with time delays, an intensive research has thus been conducted by adopting the free-matrix-based integral inequality (FMBII) method. A simplified FMBII is proposed for the estimation of the derivative of Lyapunov- Krasovskii functional, thus obtaining the delay-dependent stability criteria with less degree of conservation. Finally, a comparison has been made between the current proposed method and the existing methods (see [4], [5], [7]and[8]), with the numerical example results verifying the validity and superiority of the currenth proposed approach.

**Keywords**：free-matrix-based integral inequality；neutral delay systems；stability

## 0　引言

在实际应用系统中，许多系统的数学模型都是利用时滞状态和时滞状态的导数，通过中立型泛函微分方程来描述，例如：无损传输线、微波振荡器、汽水管道的动态处理以及分布网络等[1]。时滞在系统中频繁出现，常常引起系统不稳定并产生振荡[2-5]。因此，国内外学者针对不同类型中立型时滞系统（neutral delay systems，NDS）的稳定性问题进行了

**收稿日期**：2016-07-25

**基金项目**：国家自然科学基金资助项目（61304064），国家火炬计划基金资助项目（2015GH712901），湖南省自然科学基金资助项目（2015JJ3064），湖南省教育厅科学研究优秀青年基金资助项目（15B067），广东省特种光纤材料与器件工程技术研究开发中心开放基金资助项目

**作者简介**：练红海（1990-），男，湖南永州人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为鲁棒控制，神经网络，时滞系统，E-mail：1132830550@qq.com

**通信作者**：肖伸平（1965-），男，湖南永州人，湖南工业大学教授，主要从事鲁棒控制，过程控制，时滞系统等方面的教学与研究，E-mail：xsph_519@163.com

讨论和研究，并取得了大量的研究成果[2-8]。

中立型时滞系统的稳定性分析主要有 2 类方法：直接的 Lyapunov 方法和输入－输出方法，而直接的 Lyapunov 方法在分析系统的稳定性问题时，更加简单有效。针对时变 NDS，文献[2]和文献[3]利用增广 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法，获得了相应的稳定条件。文献[5]利用自由权矩阵方法研究了 NDS 鲁棒稳定和镇定，文献[6]也提出了该方法。文献[8]利用时滞分割方法，使其泛函包含更多的信息，得到了具有较低保守性的 NDS 稳定准则，此方法由于将时滞分成了若干个区间，泛函也分成了若干段，增加了推导的复杂性和计算的运行时间。要获得保守性小的稳定条件主要从 2 方面入手：一是选择合适的泛函；二是对其泛函导数进行严格约束。因此，许多学者提出了不同的积分不等式约束泛函导数的积分项，如 Jense、Wirtinger 积分不等式等。Zeng Hongbing 等在文献[9]和[10]提出了 2 类不同的自由矩阵积分不等式（free-matrix-based integral inequality，FMBII）。

本文在文献[10]提出的 FMBII 基础上，对其做了简化，提出了一种简化的 FMBII。利用 FMBII 约束 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中的积分项，获得 NDS 的鲁棒时滞相关稳定判据。最后，2 个数值实例表明了本文提出的方法具有更低的保守性，相比已有结果更有优越性。

本文采用如下标号。

$\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^{n\times m}$ 分别代表实数域的 $n$ 维向量空间和 $n\times m$ 的矩阵空间；

$\boldsymbol{X}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 分别代表矩阵的逆和转置；

$\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 分别表示合适维数的零矩阵和单位矩阵；

$\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{Y}\}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 与其转置之和；

“*”表示矩阵中的对称项。

## 1 系统描述

考虑如下具有时变结构不确定性的 NDS：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\left(\boldsymbol{C}+\Delta\boldsymbol{C}(t)\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t-h)=\left(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t)\right)\times\\ \qquad \boldsymbol{x}(t)+\left(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}(t)\right)\boldsymbol{x}(t-h),\ \ t>0\,;\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ \ t\in[-h,0]\,。\end{cases} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量；

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为合适维数的常数实矩阵；

时滞 $h>0$ 为一个标量且满足 $h\in[h_{\min},\ h_{\max}]$；

$\boldsymbol{\phi}(t)$ 为零初始条件。

时变结构不确定性的形式为

$$\left[\Delta\boldsymbol{C}(t)\ \Delta\boldsymbol{A}(t)\ \Delta\boldsymbol{B}(t)\right]=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\left[\boldsymbol{E}_c\ \ \boldsymbol{E}_a\ \ \boldsymbol{E}_b\right], \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}_a$, $\boldsymbol{E}_b$ 和 $\boldsymbol{E}_c$ 为具有合适维数的常数矩阵；

$\boldsymbol{F}(t)$ 为未知实矩阵，且满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I},\forall t\,。 \tag{3}$$

当 $\boldsymbol{F}(t)=0$ 时，系统（1）可描述为标称系统，即：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-h)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-h),\ t>0\,;\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-h,0]\,。\end{cases} \tag{4}$$

下面的引理用于处理中立型时滞系统中的时变结构不确定性。

**引理 1** 给定适当维数的正定矩阵 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，对所有 $\boldsymbol{F}(t)$ 满足 $\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{I}$，

$$\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}<0$$

成立，当且仅当存在一个标量 $\varepsilon>0$，使得

$$\boldsymbol{Q}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0。$$

为了得到本文的主要结论，提出下面简化的自由矩阵积分不等式。

**引理 2** 对正定对称矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，任意矩阵 $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2\in\mathbf{R}^{3n\times n}$，向量函数 $\boldsymbol{x}$: $[\alpha,\beta]$，使得不等式（5）成立，即

$$-\int_{\alpha}^{\beta}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\Sigma_1\boldsymbol{\varpi}_1(\alpha,\beta)。 \tag{5}$$

式中：$\Sigma_1=(\beta-\alpha)\left(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\right)$；

$\mathrm{Sym}\left\{\boldsymbol{G}_1[\boldsymbol{I},-\boldsymbol{I},0]+\boldsymbol{G}_2[\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},-2\boldsymbol{I}]\right\}$；

$$\boldsymbol{\varpi}_1(\alpha,\beta)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\beta)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\quad \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}。$$

**证明** 定义

$$f(s)=\frac{2s-\beta-\alpha}{\beta-\alpha},\ \boldsymbol{G}=\left[\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\xi}(s)=\left[\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\quad f(s)\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\right]^{\mathrm{T}}。$$

由基本不等式 $-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\leqslant\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X}>0$，可得

$$-2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(s)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)。 \tag{6}$$

在区间 $s$: $[\alpha,\beta]$ 对式（6）两边积分，有

$$\begin{aligned}&-2\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\beta,\alpha)\boldsymbol{G}_1[\boldsymbol{I}\ \ -\boldsymbol{I}\ \ \mathbf{0}]\boldsymbol{\varpi}_1(\alpha,\beta)-2\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\boldsymbol{G}_2[\boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{I}\ \ -2\boldsymbol{I}]\times\\&\boldsymbol{\varpi}_1(\alpha,\beta)\leqslant(\beta-\alpha)\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varpi}_1(\alpha,\beta)+\frac{(\beta-\alpha)}{3}\times\\&\boldsymbol{\varpi}_1^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta)\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varpi}_1(\alpha,\beta)+\int_{\alpha}^{\beta}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\,。\end{aligned} \tag{7}$$

将式（7）整理可得式（5），引理 1 证明完毕。

**引理 3** 对正定对称矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，任意矩阵 $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2\in\mathbf{R}^{2n\times n}$，向量函数 $\boldsymbol{x}$: $[\alpha,\beta]$，使得不等式（8）成立，即

$$-\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\varpi}_2^{\mathrm{T}}(\alpha,\beta,s)\Sigma_2\boldsymbol{\varpi}_2(\alpha,\beta,s)。 \tag{8}$$

式中：$\Sigma_1=(\beta-\alpha)\left(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\right)$，其中

$\mathrm{Sym}\left\{\boldsymbol{G}_1[\boldsymbol{I}\ \ \mathbf{0}]+\boldsymbol{G}_2[\boldsymbol{I}\ \ -2\boldsymbol{I}]\right\}$；

$$\bar{\boldsymbol{\varpi}}_2(\alpha,\beta,s)=\left[\int_\alpha^\beta \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s \quad \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\int_\alpha^s \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}}。$$

**证明** 将式（6）中$-2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{x}}(s)$改成$-2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(s)$，$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)$改成$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)$，类似于引理2的证明，容易得到定理3，在此省略证明过程。

**注1** Zeng Hongbing 等在文献[9]首次提出FMBII。在FMBII基础上，Zeng Hongbing 等充分考虑二重积分项和优化自由矩阵，得到一个改进的FMBII，详见文献[10]。实事表明，文献[9]和[10]的FMBII比文献[11]的Wirtinger积分不等式（Wirtinger-base integral inequality，WBI）具有更低的保守性。受文献[10]的启发，本文继续优化自由矩阵和减少矩阵的维数，得到一种简化的FMBII即引理2和引理3。文献[10]的引理1引入了3个维的自由矩阵$\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_3$，并考虑二重积分项，它是一个4阶的FMBII。而引理2仅引入2个$3n\times n$自由矩阵$\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2$，它是一个3阶的FMBII。相比文献[10]的引理1，本文简化了自由矩阵，简化了计算和推导的复杂程度。另外，文献[9]的引理4在一定程度上与本文引理2是等价的，但它引入了一系列自由矩阵$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$，而本文引理2只引入2个自由矩阵，因此引理2简化了文献[9]的引理4。

**注2** 设$\boldsymbol{G}_1=\frac{1}{\beta-\alpha}[-\boldsymbol{R}\ \ \boldsymbol{R}\ \ \boldsymbol{0}], \boldsymbol{G}_2=\frac{3}{\beta-\alpha}[-\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}\ \ 2\boldsymbol{R}]$，容易证明文献[11]中的推论5是引理2的一种特殊情况。令

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{R}}(\dot{\boldsymbol{x}},\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。$$

引理2只能用来约束积分项$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{R}}(\dot{\boldsymbol{x}},\alpha,\beta)$而不能约束积分项$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x},\alpha,\beta)$。此时可用引理3来处理，而引理3在某种意义上是引理2的另一种表达形式。

## 2 主要结果

本文利用简化的FMBII，提出了2个新的NDS稳定条件。为了简化表达，定义记号如下：

$$\boldsymbol{\chi}_1(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\quad \int_{t-h}^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\chi}_2(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\eta}(t)=\left[\boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}(t-h)\quad \frac{1}{h}\int_{t-h}^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{e}_i=\left[\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n}\quad \boldsymbol{I}_n\quad \boldsymbol{0}_{n\times(5-i)n}\right], i=1,2,\cdots,5。$$

第一个稳定判据如下。

**定理1** 给定标量$h>0$，如果存在对称矩阵$\boldsymbol{P}_a(\in\mathbf{R}^{3n\times 3n})>0, \boldsymbol{Q}_a(\in\mathbf{R}^{3n\times 3n})>0, \boldsymbol{R}_a(\in\mathbf{R}^{n\times n})>0$，和任意矩阵$\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2\in\mathbf{R}^{3n\times n}, \boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使LMIs式（9）成立，即

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_1 & h\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1 & h\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2\\ * & -h\boldsymbol{R}_a & \boldsymbol{0}\\ * & * & -3h\boldsymbol{R}_a\end{bmatrix}<0, \tag{9}$$

则系统（4）是渐近稳定的。

式中：$\boldsymbol{\Phi}_1=\mathrm{Sym}\{\Xi_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_a\Xi_2\}+\Xi_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_a\Xi_3-\Xi_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_a\Xi_4+h\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{e}_2+\mathrm{Sym}\{\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1\Xi_6+\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2\Xi_7+\Xi_8^{\mathrm{T}}\Xi_9\}$;

$\Xi_1=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\quad h\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_2=\left[\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_3=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_4=\left[\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_5=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_6=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_7=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_8=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2\right]^{\mathrm{T}}$;

$\Xi_9=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$。

**证明** 选择Lyapunov-Krasovskii泛函

$$\boldsymbol{V}(x_t)=\boldsymbol{\chi}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_a\boldsymbol{\chi}_1(t)+\int_{t-h}^t \boldsymbol{\chi}_2^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{\chi}_2(s)\mathrm{d}s+\int_{-h}^0\int_{t+\theta}^t \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_a\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta。\tag{10}$$

计算$\boldsymbol{V}(x_t)$的导数，有

$$\dot{\boldsymbol{V}}(x_t)=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left[\mathrm{Sym}\left\{\Xi_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_a\Xi_2\right\}+\Xi_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_a\Xi_3-\Xi_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_a\Xi_4+h\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{e}_2\right]\boldsymbol{\eta}(t)-\int_{t-h}^t \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_a\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\tag{11}$$

使用引理2估计式（11）中的一次积分项，可得

$$-\int_{t-h}^t \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_a\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left[\Xi_5^{\mathrm{T}}\left(h\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{R}_a^{-1}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}+\frac{h}{3}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}_a^{-1}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\right)\times\Xi_5+\mathrm{Sym}\left\{\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1\Xi_6+\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1\Xi_7\right\}\right]\boldsymbol{\eta}(t)。\tag{12}$$

另外，若存在任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$，则等式（13）成立，

$$0=2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_1+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_2\right]\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)-\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-h)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-h)\right]=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{Sym}\left\{\Xi_8^{\mathrm{T}}\Xi_9\right\}\boldsymbol{\eta}(t)。\tag{13}$$

结合式（11）~（13），整理可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}(x_t)=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\left(\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2\right)\boldsymbol{\eta}(t), \tag{14}$$

式中$\boldsymbol{\Phi}_2=\Xi_5^{\mathrm{T}}\left(h\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}+\frac{h}{3}\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{G}_5$。

使用Schur补引理，如果$\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2<0$，它等价于条件式（9），则有$\dot{\boldsymbol{V}}(x_t)<0$。由Lyapunov稳定性定理可知，NDS式（4）是渐进稳定的。

将定理1扩展到具有时变结构不确定性的NDS，

可得下面的时滞相关鲁棒稳定判据。

**定理 2**　给定标量 $h$<0，若存在对称矩阵 $\boldsymbol{P}_a(\in\mathbf{R}^{3n\times 3n})>0$, $\boldsymbol{Q}_a(\in\mathbf{R}^{3n\times 3n})>0$, $\mathbf{R}_a(\in\mathbf{R}^{n\times n})>0$，和任意矩阵 $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2\in\mathbf{R}^{3n\times n}$, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$，以及标量 $\varepsilon>0$，使 LMIs 式（15）成立，即

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1+\mu\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_2 & h\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_1 & h\Xi_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}} \\ * & -h\boldsymbol{R}_a & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -3h\boldsymbol{R}_a & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\mu\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0,\tag{15}$$

式中：$\boldsymbol{\Gamma}_1=[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{D}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_2\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{D}]^{\mathrm{T}}$;

$\boldsymbol{\Gamma}_2=[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}_a+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_3\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}_b+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}_4\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}_c]^{\mathrm{T}}$。

则称系统式（1）是渐进稳定的。

**证明**　将式（9）中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{DF}(t)\boldsymbol{E}_a$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_b$，$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{DF}(t)\boldsymbol{E}_c$ 替换，使用引理 1 和 Schur 补引理，可得条件式（15），证明结束。

## 3　数值算例

**例 1**　考虑标称 NDS 式（4）具有如下矩阵参数：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2.0 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -2.0 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},\ 0\leqslant c\leqslant 1。$$

对不同的 $c$，由定理 1、文献[4]和[5]中的稳定判据，得到最大时滞上界 $h$ 如表 1 所示。从表 1 可知，定理 1 所得最大时滞上界与文献[4],[5]相比，具有一定的优越性。

**表 1　不同 $c$ 下的最大时滞上界 $h$**

Table 1　Maximum upper bounds of $h$ with $c$ the variable

| 稳定判据 | $c$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.70 | 0.90 |
| 文献[4] | 4.35 | 4.33 | 4.10 | 3.62 | 2.73 | 0.99 |
| 文献[5] | 4.47 | 4.35 | 4.13 | 3.67 | 2.87 | 1.41 |
| 定理 1 | 6.05 | 5.93 | 5.46 | 4.68 | 3.48 | 1.56 |

**注 3**　文献[5]提出的自由权矩阵方法，在推导时滞相关条件方面被视为一种有效方法。这个数值实例表明本文提出的方法优于文献[5]。

**例 2**　考虑具有结构不确定性的 NDS 式（1）具有如下矩阵参数：

$$\boldsymbol{A}=100\times\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=100\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{72}\times\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{D}=2\boldsymbol{I},$$

$$\boldsymbol{E}_a=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{E}_b=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{E}_c=\boldsymbol{0}。$$

对不同的 $\gamma$，由定理 1、文献[7]和[8]中的稳定判据得最大时滞上界 $h$ 如表 2 所示。从表 2 可知，本文提出的方法比文献[8]使用的时滞分段方法（分段数甚至达到 $q$=5）和文献[7]使用的广义系统方法，具有更低的保守性。

**表 2　不同 $\gamma$ 下的最大时滞上界 $h$**

Table 2　Maximum upper bounds of $h$ with $\gamma$ the variable

| 名称 | $\gamma$ | | |
|---|---|---|---|
| | −2.105 0 | −2.103 0 | −2.100 0 |
| 文献[7] | 0.406 4 | 0.278 3 | 0.207 9 |
| 文献[8]($q$=2) | 0.549 9 | 0.383 5 | 0.287 7 |
| 文献[8]($q$=3) | 0.583 0 | 0.406 1 | 0.304 4 |
| 文献[8]($q$=4) | 0.594 9 | 0.414 2 | 0.310 3 |
| 文献[8]($q$=5) | 0.600 4 | 0.414 8 | 0.313 1 |
| 定理 2 | 0.757 1 | 0.428 2 | 0.315 4 |

**注 4**　时滞分段方法被广泛用于推导具有保守性小的时滞相关条件，时滞分段的数量越多，得到条件的保守性越小。但时滞分段的数量直接影响所得线性矩阵不等式的维度，分割数量越大，矩阵维数也越大，计算负担也急剧增加。

## 4　结论

本文提出了一种简化的 FMBII，并利用提出的 FMBII 进一步研究 NDS 的稳定性问题。先构造一个合适的增广 Lyapunov-Krasovskii 泛函，并利用简化的 FMBII 估计其导数的积分项，得到 2 个新的 NDS 时滞相关稳定条件。最后，通过数值算例展示了本方法的可行性和优越性。简化的 FMBII 能应用到其他时滞系统，例如：神经网络、基因调控网络、模糊控制系统以及电力系统等。

**参考文献：**


[1]　SAKTHIVEL R，MATHIYALAGAN K，MARSHAL ANTHONI S. Robust Stability and Control for Uncertain Neutral Time Delay Systems[J]. International Journal of Control，2012，85(4)：373–383.

[2]　肖伸平，曾红兵. 中立型时变时滞系统时滞相关稳定性[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(4)：58–61.
XIAO Shenping，ZENG Hongbing. On Delay-Dependent Stability of Neutral Systems with Time-Varying Delay[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(4)：58–61.

[3]　白　雷，肖伸平，曾红兵，等. 中立型变时滞系统鲁棒稳定性分析[J]. 湖南工业大学学报，2012，26(1)：50–54.


（下转第 76 页）