

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2015.05.021

具有有界干扰的耦合谐振子网络的一致性

范龙云¹, 朱善华¹, 徐承杰¹, 文平², 文伟¹

(1. 湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007; 2. 湖南工业大学 冶金工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 为了研究具有有界外部干扰的耦合谐振子网络的一致性, 先利用变结构控制方法提出具有有界外部干扰的耦合谐振子网络的一致性协议; 再运用 Lyapunov 稳定性理论、代数图论和矩阵理论, 得到谐振子网络实现一致的充分条件; 最后利用数值模拟验证提出协议的有效性。

关键词: 外部干扰; 耦合谐振子; 一致性

中图分类号: TP13; O322

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2015)05-0102-05

The Consistency of Coupled Harmonic Oscillator Network with Bounded Disturbance

Fan Longyun¹, Zhu Shanhua¹, Xu Chengjie¹, Wen Ping², Wen Wei¹

(1. School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China;

2. School of Metallurgical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract : For investigating the consistency of coupled harmonic oscillator network with bounded external disturbances, firstly proposed the consensus protocol by using the variable structure control method; Secondly based on Lyapunov stability theory, algebraic graph theory and matrix theory, obtained sufficient conditions for realizing the network consistency. Finally, used numerical simulation to verify the validity of the proposed protocol.

Keywords : consensus; coupled harmonic oscillators; external disturbances

0 引言

随着科学技术的发展, 控制系统的结构和对象越来越复杂, 网络和系统的协调控制得到了人们的高度关注。如: 无人机飞行的编队控制, 多智能体系统群集运动, 分布式传感器网络控制, 多机器人编队控制, 人造卫星群位姿控制^[1-5]等。

在多智能体系统的协调控制中, 一致性(或同步)是重要的研究内容。由于耦合谐振子网络可以描述许多真实的自然现象, 使得越来越多的学者对其一致性问题展开了讨论。

Kuramoto 模型是一种比较典型的耦合谐振子模型。在文献[6]中, Y. Kuramoto 提出实现网络一致性的基本条件是网络中的节点是全局连通的。在文献[7]中, Ren Wei 研究了在网络连通受限的条件下, 线性二阶耦合谐振子网络实现同步的问题, 通过运用代数图论、矩阵理论等, 得到网络实现同步的条件。文献[8]重点分析了在节点与邻居节点连通动态变化的网络中, 耦合谐振子实现同步。文献[9]研究了非线性耦合谐振子的同步问题, 运用一个非线性方程式描述节点之间的耦合关系。文献[10]在文献[9]研究成果的基础上进一步分析, 从节点与邻

收稿日期: 2015-07-09

基金项目: 湖南省普通高等学校教学改革基金资助项目(湘教通[2014]322), 湖南工业大学自然科学基金资助项目(2014HZX23)

作者简介: 范龙云(1990-), 女, 河北高碑店人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为网络化系统控制,
E-mail: fanlongyun125@126.com

居节点瞬时连通的角度,利用分布式控制协议,研究了耦合谐振子实现同步的问题。在文献[11]中,Zhang Hua等考虑了数据丢失的情况,研究了耦合谐振子网络同步问题。文献[12]提出了包含控制协议和基于采样数据的包含控制协议,研究了在有向拓扑下耦合谐振子网络的包含控制一致性问题。

许多学者从多个方面研究了耦合谐振网络的一致性,但他们没有考虑在有外部干扰的情况下,耦合谐振子网络如何实现一致性的问题。近年来,多智能体系统的理论研究发展迅速,节点与节点之间、节点与环境之间都会有密切联系和大量信息交换,如何抑制干扰让系统达到一致性,已经成为一个非常重要的现实问题。因此,本文研究具有有界干扰的耦合谐振子网络的一致性,并运用代数图论、矩阵理论以及Lyapunov稳定性理论,得到网络实现一致性的充分条件。

文中用到的符号有: \mathbf{R}^n 表示 n 维欧氏空间; $\|\cdot\|_1$ 、 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 分别表示一个矢量的1-范数、2-范数和 ∞ -范数; \otimes 表示张量积; \mathbf{I}_n 是 n 阶单位矩阵。

1 预备知识和模型

设一个网络有 N 个节点,网络的无向拓扑图为 $G=(v, \varepsilon, \mathbf{A})$,其中, $v=\{1, 2, \dots, N\}$ 为图的 N 个节点集, $\varepsilon \subseteq v \times v$ 为边集。如果节点 i 和 j 之间有连边,则 $a_{ii}=0$ ($i=j$), $a_{ij}=a_{ji}=1$ ($i \neq j$), $i, j=1, 2, \dots, N$; 否则 $a_{ii}=0$ ($i=j$), $a_{ij}=a_{ji}=0$ ($i \neq j$), $i, j=1, 2, \dots, N$ 。节点 i 的邻居集合 N_i 定义为 $N_i=\{j \in v: (i, j) \in \varepsilon, j \neq i\}$ 。邻接矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}=[l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其中 $l_{ii}=\sum_{j=1}^N a_{ij}$, $l_{ij}=-a_{ij}$, $i \neq j$ 。易知,邻接矩阵和拉普拉斯矩阵都是对称矩阵。

本文讨论具有外部干扰谐振子网络的一致性,其中网络第 i 个节点的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{q}_i(t); \\ \dot{\mathbf{q}}_i(t) = -\omega^2 \mathbf{p}_i(t) + \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{d}_i(t); \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

式中: $\mathbf{p}_i(t) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{q}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别表示网络中第 i 个节点的位置矢量和速度矢量;

ω 是谐振子的频率;

$\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 为网络中第 i 个节点的控制输入;

$\mathbf{d}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 为网络中第 i 个节点的干扰项。

假设1 存在一个常数 $\gamma < 1$,使得 $\|\mathbf{d}_i(t)\|_\infty \leq \gamma$,且 $\dot{\mathbf{d}}_i$ 有界, $i=1, 2, \dots, N$ 。

假设2 耦合谐振子网络的拓扑图 G 为无向连通图,即 G 中任意2个节点之间存在一条路径。

由文献[13]可知,拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 是对称不可约

矩阵。

假设3 系统存在一个虚拟领导者,即当时间 $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_0$, $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_0$ 。 \mathbf{p}_0 和 \mathbf{q}_0 分别表示领导者的位置矢量和速度矢量,虚拟领导者不受外界干扰的影响,其动态可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_0(t) = \mathbf{q}_0(t), \\ \dot{\mathbf{q}}_0(t) = -\omega^2 \mathbf{p}_0(t). \end{cases}$$

对于式(1),考虑 $\mathbf{u}_i(t)$ 具有式(2)的性质,即耦合谐振子网络的一致性控制协议。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) + a_{i0} (\mathbf{q}_0(t) - \mathbf{q}_i(t)) + \\ & \text{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) + a_{i0} (\mathbf{q}_0(t) - \mathbf{q}_i(t)) \right), \\ & i=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

式中,当网络中的节点 i 与领导者之间有连边,则 $a_{i0}=1$,否则 $a_{i0}=0$;不至混淆的情况下,仍将向量值符号函数记为 $\text{sgn}(\mathbf{x})$,并定义为

$$\text{sgn}(\mathbf{x}) = \text{sgn} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sgn}(x_1) \\ \vdots \\ \text{sgn}(x_n) \end{pmatrix},$$

$$\text{其中} \begin{cases} x_i > 0, \text{sgn}(x_i) = 1, \\ x_i = 0, \text{sgn}(x_i) = 0, \\ x_i < 0, \text{sgn}(x_i) = -1. \end{cases}$$

在控制协议式(2)下,系统式(1)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{q}_i(t), \\ \dot{\mathbf{q}}_i(t) = -\omega^2 \mathbf{p}_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) + a_{i0} (\mathbf{q}_0(t) - \mathbf{q}_i(t)) + \\ \text{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{q}_j(t) - \mathbf{q}_i(t)) + a_{i0} (\mathbf{q}_0(t) - \mathbf{q}_i(t)) \right) + \mathbf{d}_i(t). \end{cases} \quad (3)$$

2 具有有界干扰的耦合谐振子网络的一致性

引理1^[14] 若 $\mathbf{L}=[l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是对称的不可约矩阵,且 $l_{ii}=-\sum_{j=1, j \neq i}^N l_{ij}$, $l_{ij}=l_{ji} \leq 0$ ($i \neq j$)。则 \mathbf{L} 是半正定的,且对于任意的矩阵 $\mathbf{E}=\text{diag}(e, 0, \dots, 0)$ (其中 $e>0$), $\mathbf{L}+\mathbf{E}$ 正定。

引理2^[15] 若 $V(t)$ 满足:

- 1) $V(t)$ 有下界;
- 2) $\dot{V}(t)$ 半负定;
- 3) $\dot{V}(t)$ 关于 t 一致连续;

那么 $t \rightarrow \infty$ 时, $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ 。

定理 1 若假设 1 与假设 2 都成立, 且网络中至少有一个节点被虚拟领导者牵制, 则在控制协议式 (2) 的作用下, 网络式 (1) 中的所有节点达到一致, 一致状态为

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} (p_i(t) - p_0(t)) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (q_i(t) - q_0(t)) = 0. \end{cases}$$

证 定义网络式 (1) 的误差变量:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i(t) &= p_i(t) - p_0(t), \\ \tilde{q}_i(t) &= q_i(t) - q_0(t), \\ i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

则网络式 (1) 的误差系统可以写成

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_i(t) = \tilde{q}_i(t), \\ \dot{\tilde{q}}_i(t) = -\omega^2 \tilde{p}_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j(t) - \tilde{q}_i(t)) - a_{i0} \tilde{q}_i(t) + \\ \quad \text{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j(t) - \tilde{q}_i(t)) - a_{i0} \tilde{q}_i(t) \right) + d_i(t). \end{cases} \quad (4)$$

对系统式 (4), 考虑如下的 Lyapunov 候选函数

$$V = \frac{1}{2} \omega^2 \tilde{p}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q}. \quad (5)$$

式中: $\tilde{p} = [\tilde{p}_1^T, \tilde{p}_2^T, \dots, \tilde{p}_N^T]^T$;

$$\tilde{q} = [\tilde{q}_1^T, \tilde{q}_2^T, \dots, \tilde{q}_N^T]^T;$$

$\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})$, 其中 $\tilde{l}_{ii} = l_{ii} + a_{i0}$, 当 $i \neq j$ 时, $\tilde{l}_{ij} = l_{ij}$, 由

引理 1 可知, $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})$ 正定。

对 V 关于 t 求导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega^2 \tilde{p}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \dot{\tilde{p}} + \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \dot{\tilde{q}} = \\ &= \omega^2 \tilde{p}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q} + \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) (-\omega^2 \tilde{p} + u + d) = \\ &= \omega^2 \tilde{p}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q} - \omega^2 \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{p} + \\ &= \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) u + \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) d = \\ &= \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) u + \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) d = \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j - \tilde{q}_i) + a_{i0} (\tilde{q}_0 - \tilde{q}_i) + \right. \\ &\quad \left. \text{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j - \tilde{q}_i) + a_{i0} (\tilde{q}_0 - \tilde{q}_i) \right) \right) + \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} d_i. \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $u = [u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T]^T$, $d = [d_1^T, d_2^T, \dots, d_N^T]^T$ 。

由于

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j - \tilde{q}_i) + a_{i0} (\tilde{q}_0 - \tilde{q}_i) \right) &= \\ \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \left(\sum_{j \in N_i} (a_{ij} + a_{i0}) (\tilde{q}_j - \tilde{q}_i) \right) &= \\ \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \left(\sum_{j \in N_i} -\tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right) &= \\ -\tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q}, \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 式 (6) 可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q} + \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \text{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j - \tilde{q}_i) + a_{i0} (\tilde{q}_0 - \tilde{q}_i) \right) + \\ &= \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} d_i. \end{aligned} \quad (8)$$

由于

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \text{sgn} \left(\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\tilde{q}_j - \tilde{q}_i) + a_{i0} (\tilde{q}_0 - \tilde{q}_i) \right) &= \\ \tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \text{sgn} (-\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q} &= -\sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right\|, \end{aligned} \quad (9)$$

再由假设 1, 可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i^T \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} d_i &\leq \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{q}_j \tilde{l}_{ij} d_i \right\| \leq \\ \gamma \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right\| &\leq \sum_{i=1}^N \left(\gamma \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right\| \right). \end{aligned} \quad (10)$$

将式 (9) 和 (10) 代入式 (8) 中, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q} - \\ &= \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right\| + \sum_{i=1}^N \left(\gamma \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right\| \right) = \\ &= -\tilde{q}^T (\tilde{L} \otimes I_n) (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{q} - \sum_{i=1}^N \left((1-\gamma) \left\| \sum_{j \in N_i} \tilde{l}_{ij} \tilde{q}_j \right\| \right). \end{aligned} \quad (11)$$

根据假设 1, 因 $\gamma < 1$, 则, $\dot{V} \leq 0$, 从而 $V \leq V_0$, 其中 V_0 表示 V 的初始值。

由式 (11) 有

$$\frac{1}{2} \omega^2 \tilde{p}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{p} \leq V \leq V_0,$$

$$\tilde{p}^T (\tilde{L} \otimes I_n) \tilde{p} \leq \frac{2V_0}{\omega^2}.$$

从而有

$$\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{\sqrt{2V_0}}{\omega\lambda_1}, \quad \|\tilde{q}\|_2 \leq \frac{\sqrt{2V_0}}{\lambda_1},$$

式中 λ_1 表示 \tilde{L} 的最小特征值。

这就表明 \tilde{p} 及 \tilde{q} 有界,进而由式(4)及假设1可知, $\dot{\tilde{q}}$ 有界。再由式(8)知, \dot{V} 仅依赖于 \tilde{q} 及 $\dot{\tilde{q}}$,而 \tilde{q} 及 $\dot{\tilde{q}}$ 有界,所以 \dot{V} 有界,从而 \dot{V} 关于 t 一致连续。根据引理2, $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ 。根据LaSalle不变原理^[15],当 $t \rightarrow \infty$,有 $q_i \rightarrow q_0$, $p_i \rightarrow p_0$,因此网络式(1)可以实现渐近一致。

3 数值仿真

为了说明前文所提出控制协议的有效性,本章考虑一个由8个谐振子组成的网络,对该网络进行数值仿真,此谐振子网络的拓扑结构见图1。

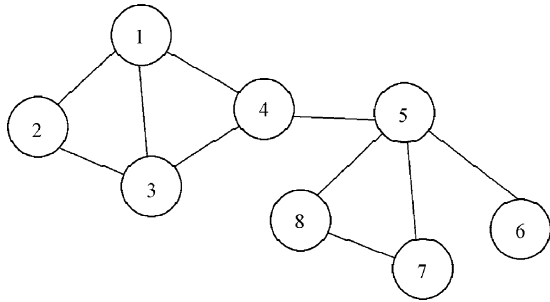


图1 谐振子网络的拓扑图

Fig. 1 The topology of harmonic oscillators network

该谐振子网络的拓扑图对应的邻接矩阵 $A=[a_{ij}]$ 和拉普拉斯矩阵 $L=[l_{ij}]$ 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

可得矩阵 L 的特征值分别为 $\lambda_1=0.0000, \lambda_2=0.3187, \lambda_3=1.0000, \lambda_4=2.3579, \lambda_5=3.0000, \lambda_6=4.0000, \lambda_7=4.0000, \lambda_8=5.3234$,可见 L 半正定。 $\tilde{L}=L+\text{diag}(a_{10}, a_{20}, \dots, a_{N0})$ 的特征值: $\lambda_1=0.2774, \lambda_2=0.5493, \lambda_3=1.7997, \lambda_4=2.4197, \lambda_5=3.0000, \lambda_6=4.0955, \lambda_7=4.7961, \lambda_8=6.0623$,因此 \tilde{L} 正定。

本文选取谐振子的频率 $\omega=3$,设定虚拟领导者的位置和速度为 $p_0(0)=0.4, q_0(0)=1$ 。网络中的所有谐振子的速度和位置的初始状态都是随机的,其中8个谐振子中只有1,5,6谐振子可以收到虚拟领导者发出的信号,得到的网络速度轨迹和位置轨迹的仿真结果见图2~3。

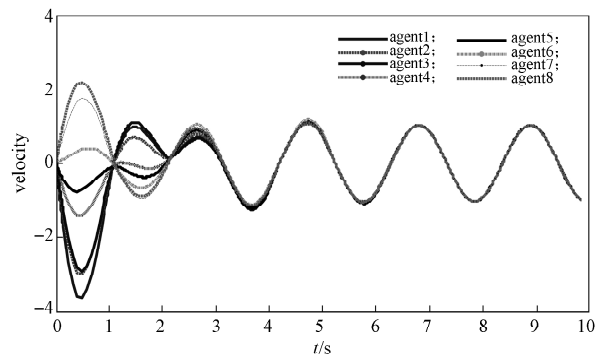


图2 仿真网络速度轨迹

Fig. 2 The velocity trajectory of simulated network

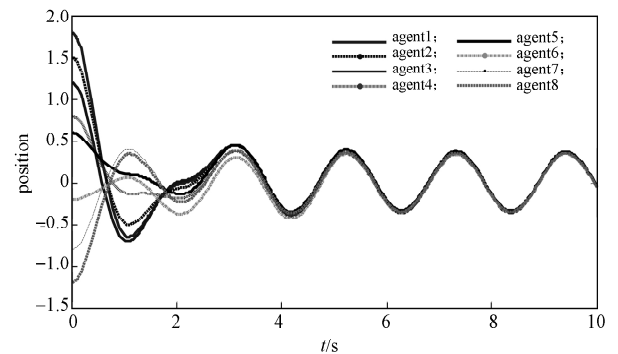


图3 仿真网络位置轨迹

Fig. 3 The position trajectory of simulated network

由仿真图可知,网络中所有谐振子在受到控制协议式(2)的控制下,可以跟踪到虚拟领导者的速度和位置,最终实现谐振子网络的一致性。

4 结语

本文研究了具有有界干扰的谐振子网络的一致性问题。提出了谐振子网络实现一致性的控制协议,并运用Lyapunov稳定性理论、代数图论和矩阵理论,得到了网络实现一致性的充分条件。最后通过数值仿真验证了所提出的一致性协议的有效性。

参考文献:

- [1] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of Groups of Mobile Autonomous Agents Using Nearest Neighbor Rules[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6), 988–1001.
- [2] 郭雷, 许晓鸣. 复杂网络[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2006: 247–248.
GUO Lei, Xu Xiaoming. Complex Networks[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House, 2006: 247–248.
- [3] Fax J A, Murray R M. Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1465–1476.
- [4] Kawasaki H, Ueki S, Ito S. Decentralized Adaptive Coordinated Control of Multiple Robot Arms Without Using a Force Sensor[J]. Automatica, 2006, 42(3): 481–488.
- [5] Lu Xiaoqing, Francis Austin, Chen Shihua. Cluster Consensus of Second-Order Multi-Agent Systems via Pinning Control[J]. Chinese Physics B, 2010, 19(12): 120506.
- [6] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence [M]. Berlin: Springer Verlag, 1984: 99–103.
- [7] Ren Wei. Synchronization of Coupled Harmonic Oscillators with Local Interaction[J]. Automatica, 2008, 44(12): 3195–3200.
- [8] Su Housheng, Wang Xiaofan, Lin Zongli. Synchronization of Coupled Harmonic Oscillators in A Dynamic Proximity Network[J]. Automatica, 2009, 45(10): 2286–2291.
- [9] Cai Chaohong, Tuna S E. Synchronization of Nonlinearly Coupled Harmonic Oscillators[C]//American Control Conference. Baltimore: IEEE, 2010: 1767–1771.
- [10] Zhou Jin, Zhang Hua, Xiang Lan, et al. Synchronization of Coupled Harmonic Oscillators with Local Instantaneous Interaction[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1715–1721.
- [11] Zhang Hua, Zhou Jin. Synchronization of Sampled-Data Coupled Harmonic Oscillators with Control Inputs Missing [J]. System & Control Letters, 2012, 61(12): 1277–1285.
- [12] Xu Chengjie, Zheng Ying, Su Housheng, et al. Containment Control for Coupled Harmonic Oscillators with Multiple Leaders Under Directed Topology[J]. International Journal of Control, 2015, 88(2): doi:10.1080/00207179.2014.944873.
- [13] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985: 286–332.
- [14] Su Housheng, Rong Zhihai, Chen M Z Q, et al. Decentralized Adaptive Pinning Control for Cluster Synchronization of Complex Dynamical Networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetic, 2013, 43(1): 394–399.
- [15] Slotine J J E, Li Weiping. Applied Nonlinear Control[M]. Beijing: China Machine Press, 2006: 51–62.

(责任编辑: 邓光辉)