doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2014.05.001

基于路的多重完全图相关图生成树计数

谭秋月

（武夷学院 数学与计算机系，福建 武夷山 354300）

摘　要：利用图G的标定技巧、矩阵和行列式运算、补生成树矩阵定理、不等式运算等理论，研究了当m=2, 3, 4, 5，且$a_1, a_2, \cdots, a_m$为任意数时，基于路的多重完全图相关图$K_n - P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$一般情况的生成树数目，并得到了相关公式。

关键词：多重完全图相关图；生成树；补生成树矩阵定理

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2014)05-0001-04

The Path-Based Enumeration of Spanning Trees of Multi-Complete Related Graphs

Tan Qiuyue

（Department of Mathematics and Computer，Wuyi University，Wuyishan Fujian 354300，China）

Abstract: By means of Graph G labeling techniques, matrix and determinant computations, the complement-spanning-tree matrix theorem and inequalities computing etc., studies the number of spanning trees of the general situation of the path-based multi-complete related graphs $K_n - P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ when m=2, 3, 4, 5, and $a_1, a_2, \cdots, a_m$ are arbitrary numbers, and gets relative counting formula.

Keywords: multi-complete related graphs; spanning trees; complement-spanning-tree matrix theorem

0　引言

图的生成树数目是图的重要不变量之一，其应用广泛。例如在网络可靠性方面有重要应用：一个网络可以用一个图G来模拟，这个网络中所有的站点之间可以互相通讯，意味着图G中必须包含一个生成树，因此，图的生成树的数目是评价该图（网络）可靠性的重要指标之一，最大化生成树的数目是加强网络可靠性的一个途径。

如果能得到一个图G生成树数目的计数公式对确定图G在完全图K_n中的补图（即补图类K_n-G，其中$|V(G)\leqslant n|$）的生成树数目的计数公式也很有意义。文献[1－3]给出了基于路的多重完全图相关图$K_n - P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$补图类。本文讨论当$m$=2, 3, 4, 5时基于路的多重完全图相关图$K_n - P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$生成树的数目，并求出一般情况下（即$a_1, a_2, \cdots, a_m$为任意数时）的计数公式。

1　图的定义

假设G_1=(V_1, E_1)和G_2=(V_2, E_2)没有公共顶点，以$V_1 \cap V_2$为顶点集，以E_1, E_2和$\{uv \mid u\in V_1, v\in V_2\}$为边集所组成的图，称为$G_1$和$G_2$的联图，记为$G_1 \vee G_2$[4]。

特别地，一个顶点和完全图K_m的联图K_{m+1}为完全图，如图1所示。

收稿日期：2014-01-18

基金项目：福建省教育厅科技基金资助项目（JK2012056），武夷学院一般基金资助项目（xq0933）

作者简介：谭秋月（1980-），女，陕西杨凌人，武夷学院讲师，硕士，主要研究方向为图论和离散数学，
E-mail：tqyspa@163.com

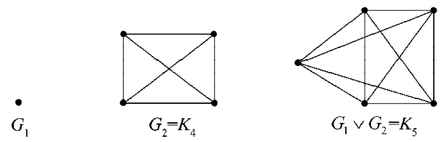

图1　$G_1 \vee G_2$

Fig. 1　$G_1 \vee G_2$

定义1[3]　由 m 个完全图 K_{a_1+1}, K_{a_2+1}, K_{a_m+1} 和连接这 m 个完全图上的任意一点形成的路 P_m 所组成的图，称为一个基于路的多重完全图，记为 $P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$。

$P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$即由路 P_m 的 m 个顶点 v_1, v_2, ⋯, v_m 分别联接完全图 K_{a_1}, K_{a_2}, ⋯, K_{a_m} 所构成。

定义2[3]　如果基于路的多重完全图 $P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$满足 $a_i \geqslant 2(i=1, 2, \cdots, m)$以及 $n \geqslant m+a_1+\cdots+a_m$，在完全图 K_n 中删去图 $P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$所有的边后组成的图称为基于路的多重完全图相关图，记为 $K_n-P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$。

图2为一个基于路的4重完全图 $P_4^K(2, 2, 3, 2)$，图3为一个基于路的4重完全图相关图 $K_{15}-P_4^K(2, 2, 3, 2)$ 的补图$\overline{K_{15}-P_4^K\left(2,2,3,2\right)}$。

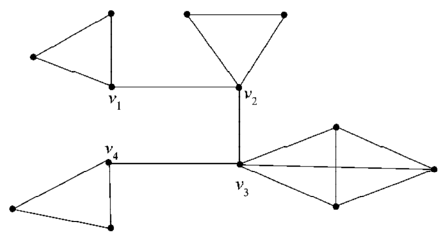

图2　$P_4^K(2, 2, 3, 2)$

Fig. 2　$P_4^K(2, 2, 3, 2)$

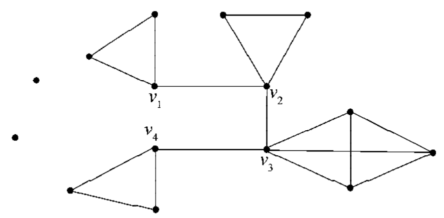

图3　$\overline{K_{15}-P_4^K\left(2,2,3,2\right)}$

Fig. 3　$\overline{K_{15}-P_4^K\left(2,2,3,2\right)}$

2　$K_n-P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$的生成树数目

本文仅讨论 m=2, 3, 4, 5，且 a_1, a_2, ⋯, a_m 为任意数时，多重完全图相关图 $K_n-P_m^K\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$生成树数目的计数公式。

2.1　结论

定理1　当 m=2，且 a_1, a_2 为任意数时，基于路 P_2 的多重完全图相关图 $K_n-P_2^K\left(a_1,a_2\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_2^K\left(a_1,a_2\right)\right)=n^{k-2}\left(1+\frac{a_1}{n-a_1-1}\right)\left(1+\frac{a_2}{n-a_2-1}\right)\cdot$$
$$\left(n-a_1-1\right)^{a_1}\left(n-a_2-1\right)^{a_2}\left[\left(q_1+1\right)\left(q_2+1\right)-1\right],$$

式中：$k=n-2-a_1-a_2$；$q_i=n-1-a_i-\dfrac{a_i}{n-1}$（$i$=1, 2）。

特殊地，当 m=2，a_1=a_2=a 时，$K_n-P_2^K\left(a,a\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_2^K\left(a,a\right)\right)=n^{k-2}\left(n-1\right)^{2a}\left(\left(q+1\right)^2-1\right),$$

式中：$k=n-2-2a$；$q=n-1-a-\dfrac{a}{n-1}$。

定理2　当 m=3，且 a_1, a_2, a_3 为任意数时，基于路 P_3 的多重完全图相关图 $K_n-P_3^K\left(a_1,a_2,a_3\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_3^K\left(a_1,a_2,a_3\right)\right)=n^{k-2}\left(n-1\right)^{a_1+a_2+a_3}\cdot$$
$$\left[\left(q_1+1\right)q_2\left(q_3+1\right)-q_1-q_3-2\right],$$

式中：$k=n-3-a_1-a_2-a_3$；$q_i=n-2-a_i-\dfrac{a_i}{n-1}$（$i$=1, 2, 3）。

特殊地，当 m=3，a_1=a_2=a_3=a 时，$K_n-P_3^K\left(a,a,a\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_3^K\left(a,a,a\right)\right)=n^{k-2}\left(n-1\right)^{3a}\left(q\left(q+1\right)^2-2q-2\right),$$

式中：$k=n-3-3a$；$q=n-2-a-\dfrac{a}{n-1}$。

定理3　当 m=4，且 a_1, a_2, a_3, a_4 为任意数时，基于路 P_4 的多重完全图相关图 $K_n-P_4^K\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_4^K\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)\right)=n^{k-2}(n-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4}\cdot$$
$$\left[\left(q_1+1\right)q_2q_3\left(q_4+1\right)-\left(q_1+1\right)q_2-\right.$$
$$\left.\left(q_1+1\right)\left(q_4+1\right)-\left(q_4+1\right)q_3+1\right],$$

式中：$k=n-4-a_1-a_2-a_3-a_4$；$q_i=n-2-a_i-\dfrac{a_i}{n-1}$（$i$=1, 2, 3, 4）。

特殊地，当 $m=4$，$a_1=a_2=a_3=a_4=a$ 时，$K_n-P_4^K\left(a,a,a,a\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_4^K\left(a,a,a,a\right)\right)=$$
$$n^{k-2}\left(n-1\right)^{4a}\left(q^2\left(q+1\right)^2-3q\left(q+1\right)+1\right),$$

式中：$k=n-4-4a$；$q=n-2-a-\dfrac{a}{n-1}$。

定理4　当 m=5，且 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 为任意数时，基于路 P_5 的多重完全相关图 $K_n-P_5^K\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_5^K\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)\right)=n^{k-2}\left(n-1\right)^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}\cdot$$
$$\left[\left(q_1+1\right)q_2q_3q_4\left(q_5+1\right)-\left(q_1+1\right)q_2\left(q_5+1\right)-\right.$$
$$\left(q_1+1\right)q_4\left(q_5+1\right)-\left(q_1+1\right)q_2q_3-$$
$$\left.q_3q_4\left(q_5+1\right)+q_1+q_3+q_5+2\right],$$

式中：$k=n-5-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5$；$q_i=n-2-a_i-\dfrac{a_i}{n-1}$（$i=1,2,3,4,5$）。

特殊地，当 $m=5$，$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a$ 时，$K_n-P_5^K(a,a,a,a,a)$的生成树数目为

$$\tau\left(K_n-P_5^K(a,a,a,a,a)\right)=$$
$$n^{k-2}(n-1)^{5a}\left(\left(q^3-2q\right)(q+1)^2-2q^2(q+1)+3q+2\right)=$$
$$n^{k-2}(n-1)^{5a}\left(\left(q^3-2q\right)(q+1)^2-2q^2(q+1)+2(q+1)+q\right)=$$
$$n^{k-2}(n-1)^{5a}\left(\left(q^3-2q\right)(q+1)^2-2\left(q^2-1\right)(q+1)+q\right),$$

式中：$k=n-5-5a$；$q=n-2-a-\dfrac{a}{n-1}$。

2.2 结论的证明

证明　基于路的多重完全相关图$K_n-P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$的补生成树矩阵的一般形式[1]为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} n\boldsymbol{E}_k & \\ & \boldsymbol{D}\end{pmatrix},$$

式中

$$\boldsymbol{D}=\left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
p_1+1 & 1 & & & & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & \\
1 & p_2 & 1 & & & & & & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & p_{m-1} & 1 & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & p_m+1 & & & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & & \lambda & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \lambda & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & \lambda & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & \lambda & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & 1 & & & & & & & & \lambda & & \\
 & & & & \vdots & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right)_{(n-k)\times(n-k)},$$

其中$k=n-m-a_1-a_2-\cdots-a_m$，$p_i=n-2-a_i$（$i=1,2,3,4,5$），$\lambda=n-1$。

因此，根据补生成树矩阵定理[1]，生成树的数目为$n^{k-2}\left|\boldsymbol{D}\right|$。

将$-\dfrac{1}{\lambda}$乘第$m+(i-1)a_i+j$列加到第i列，取$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,a_i$，将前m列和后m行中所有的“1”化为“0”，将$\boldsymbol{D}$化为分块三角矩阵，并有

$$\left|\boldsymbol{D}\right|=\left|\begin{array}{ccccccccccccccc}
q_1+1 & 1 & & & 1 & & \cdots & 1 & & & & & & & \\
1 & q_2 & 1 & & & & & & 1 & \cdots & 1 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & q_{m-1} & 1 & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & q_m+1 & & & & & & & & 1 & \cdots & 1 \\
 & & & & & \lambda & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \lambda & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \lambda & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right|=$$

$$\lambda^{a_1+a_2+\cdots+a_m}\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 & & & \\ 1 & q_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & q_{m-1} & 1 \\ & & & 1 & q_m+1 \end{vmatrix}=(n-1)^{a_1+a_2+\cdots+a_m}\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 & & & \\ 1 & q_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & q_{m-1} & 1 \\ & & & 1 & q_m+1 \end{vmatrix}=(n-1)^{a_1+a_2+\cdots+a_m}|\boldsymbol{Q}_m|，\quad(1)$$

式中$\lambda=n-1$，$|\boldsymbol{Q}_m|=\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 & & & \\ 1 & q_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & q_{m-1} & 1 \\ & & & 1 & q_m+1 \end{vmatrix}_{m\times m}$。

因此有

$$|\boldsymbol{Q}_2|=\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 \\ 1 & q_2+1 \end{vmatrix}=(q_1+1)(q_2+1)-1，\quad(2)$$

$$|\boldsymbol{Q}_3|=\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 & \\ 1 & q_2 & 1 \\ & 1 & q_3+1 \end{vmatrix}=(q_1+1)q_2(q_3+1)-q_1-q_3-2，\quad(3)$$

$$|\boldsymbol{Q}_4|=\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 & & \\ 1 & q_2 & 1 & \\ & 1 & q_3 & 1 \\ & & 1 & q_4+1 \end{vmatrix}=(q_1+1)q_2q_3(q_4+1)-$$
$$(q_1+1)q_2-(q_1+1)(q_4+1)-(q_4+1)q_3+1，\quad(4)$$

$$|\boldsymbol{Q}_5|=\begin{vmatrix} q_1+1 & 1 & & & \\ 1 & q_2 & 1 & & \\ & 1 & q_3 & 1 & \\ & & 1 & q_4 & 1 \\ & & & 1 & q_5+1 \end{vmatrix}=(q_1+1)q_2q_3q_4(q_5+1)-$$
$$(q_1+1)q_2(q_5+1)-(q_1+1)q_4(q_5+1)-$$
$$(q_1+1)q_2q_3-q_3q_4(q_5+1)+q_1+q_3+q_5+2。\quad(5)$$

将式（2）~（5）代入式（1），可得

$$\tau\left(K_n-P_2^K(a_1,a_2)\right)=n^{k-2}\left(1+\frac{a_1}{n-a_1-1}\right)\left(1+\frac{a_2}{n-a_2-1}\right)\cdot$$
$$(n-a_1-1)^{a_1}(n-a_2-1)^{a_2}\left[(q_1+1)(q_2+1)-1\right];$$

$$\tau\left(K_n-P_3^K(a_1,a_2,a_3)\right)=n^{k-2}(n-1)^{a_1+a_2+a_3}\cdot$$
$$\left[(q_1+1)q_2(q_3+1)-q_1-q_3-2\right];$$

$$\tau\left(K_n-P_4^K(a_1,a_2,a_3,a_4)\right)=n^{k-2}(n-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4}\cdot$$
$$\left[(q_1+1)q_2q_3(q_4+1)-(q_1+1)q_2-\right.$$
$$\left.(q_1+1)(q_4+1)-(q_4+1)q_3+1\right];$$

$$\tau\left(K_n-P_5^K(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\right)=n^{k-2}(n-1)^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}\cdot$$
$$\left[(q_1+1)q_2q_3q_4(q_5+1)-(q_1+1)q_2(q_5+1)-\right.$$
$$(q_1+1)q_4(q_5+1)-(q_1+1)q_2q_3-$$
$$\left.q_3q_4(q_5+1)+q_1+q_3+q_5+2\right]。$$

定理1~4证毕。

3 结语

对定理1至定理4中的生成树数目公式进行比较，没有找到规律，目前无法用数学归纳法推导出图$K_n-P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$更一般（即$m$为任意大于1的整数时）的生成树数目的公式，希望在进一步工作中有所突破。

类似地，可进一步讨论基于圈的多重星相关图$K_n-C_m^S(a_1,a_2,\cdots,a_m)$[5]和基于圈的多重完全图相关图$K_n-P_m^K(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，当$m$较小时的一般情况（即$a_1$，$a_2$，…，$a_m$为任意数）生成树的数目及最大化问题。

参考文献：

[1] Nikolopoulos S D，Rondogiannis P. On the Number of Spanning Trees of Multi-Star Related Graphs[J]. Information Processing Letters，1998，65(4)：183-188.

[2] Yan W M，Myrvold W，Chung K L. A Formula for the Number of Spanning Trees of a Multi-Star Related Graph [J]. Information Processing Letters, 1998, 68(6)：295-298.

[3] 谭秋月. 基于路的多重完全图相关图的生成树数目[J]. 曲阜师范大学学报：自然科学版，2012，38(3)：47-52.
Tan Qiuyue. The Number of Spanning Trees of Multi-Complete Related Graphs Based on Paths[J]. Journal of Qufu Normal University：Natural Science，2012，38(3)：47-52.

[4] 李晓明，黄振杰. 图中树的数目计算及其在网络可靠性中的作用[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1993：1-9.
Li Xiaoming，Huang Zhenjie. The Number of Trees in Graph Calculation and Its Role in the Network Reliability [M]. Harbin：Harbin Institute of Technology Press，1993：1-9.

[5] 谭秋月. 基于圈或路的多重星相关图的生成树数目[J]. 天津师范大学学报：自然科学版，2013，33(1)：30-34.
Tan Qiuyue. Number of Spanning Trees of Multi-Star Related Graphs Based on Cycles or Paths[J]. Journal of Tianjin Normal University：Natural Science Edition，2013，33(1)：30-34.

（责任编辑：邓光辉）