第28卷第4期
2014年7月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.28 No.4
July 2014

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2014.04.003

定积分计算的新公式及其应用

符云锦

（凤凰县 两林学区，湖南 凤凰 416211）

摘 要：利用含参变量的拉普拉斯变换，推导出不同于牛顿–莱布尼茨公式的计算定积分的1个新公式，并举例说明该公式使用方法。

关键词：含参变量的拉普拉斯变换；定积分；新公式

中图分类号：O172.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2014)04-0012-02

A New Formula for Definite Integral Calculation and Its Application

Fu Yunjin

（Lianglin School District，Fenghuang Hunan 416211，China）

Abstract：By using Laplace transform with parameters, derives a new formula for definite integral calculation which differs from Newton-Leibniz formula, and illustrates the formula method of use.

Keywords：Laplace transform with parameters; definite integral; new formula

0 引言

文献[1]给出了如下含参变量的拉普拉斯变换的定义：

定义1 设函数$f(t)$在区间$[\lambda,+\infty)$上有定义，如果含参变量s, λ的无穷积分$\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\mathrm{d}t$对$s$的某一取值范围是收敛的，则称无穷积分

$$F(s,\lambda)=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

为函数$f(t)$的含参变量λ的拉普拉斯变换。$f(t)$称为原函数，$F(s,\lambda)$称为象函数，并记为

$$L[f(t),\lambda]=F(s,\lambda),$$

其逆变换记作

$$L^{-1}[F(s,\lambda)]=f(t)。$$

注意 式（1）中，参数λ和变量s均可为复数。

文献[1]中还给出了含参变量的拉普拉斯变换的存在性和基本性质；还利用含参变量的拉普拉斯变换，推导出了一些常用的含参变量λ的拉普拉斯变换的公式。

本文利用含参变量的拉普拉斯变换，推导出计算定积分的1个新公式，并举例说明如何用该公式来计算定积分。

1 计算定积分的新公式

定理1 设函数$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，并且可积，则有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(0,a)-F(0,b), \tag{2}$$

其中$F(0, a)$和$F(0, b)$是取$s=0$，参变量$\lambda=a$与$\lambda=b$时的象函数的函数值。

证 根据定积分性质，有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t+\int_{+\infty}^{b}f(t)\mathrm{d}t=$$
$$\int_a^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t-\int_b^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=$$

收稿日期：2014-03-17

作者简介：符云锦（1984-），男，湖南泸溪人，湖南凤凰县两林学区教师，主要研究方向为初等数学，分析学及其应用，微分方程，教育理论及其应用，E-mail：wsasw4264731123@163.com

$$\int_a^{+\infty} e^{0(t-a)} f(t)dt - \int_b^{+\infty} e^{0(t-b)} f(t)dt = F(0,a) - F(0,b)。$$

注意　定理1的公式（2）表明：$f(t)$在区间$[a, b]$上的定积分$\int_a^b f(t)dt$，等于$s=0$，$\lambda=a$与$\lambda=b$时，$f(t)$的象函数$F(s, \lambda)$的函数值之差。

公式（2）与高等数学中计算定积分的传统公式——牛顿-莱布尼茨公式[2-6]

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

形式上有些相似，但本质上完全不同。一个是被积函数的象函数的函数值之差，另一个是被积函数的原函数的函数值之差。因此，式（2）是计算定积分的一个全新的公式。下面举例说明其在定积分计算中的应用。

2　实例计算

例1　计算定积分$\int_0^{\ln 2} t e^{-t} dt$。

解　查含参变量的拉普拉斯变换公式表得

$$L\left[t e^{-t}, \lambda\right] = \frac{\lambda(s+1)+1}{(s+1)^2} e^{-\lambda} = F(s,\lambda),$$

则$F(0,\lambda) = (\lambda+1)e^{-\lambda}$。

再由公式（2）得

$$\int_0^{\ln 2} t e^{-t} dt = F(0,0) - F(0,\ln 2) = \frac{1}{2}(1-\ln 2)。$$

例2　计算定积分$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 e^t dt$。

解　查含参变量的拉普拉斯变换公式表得

$$L\left[t^2 e^t, \lambda\right] = e^{\lambda}\left(\frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2\lambda}{(s-1)^2} + \frac{\lambda^2}{s-1}\right) = F(s,\lambda),$$

则$F(0,\lambda) = -e^{\lambda}(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$。

再由公式（2）得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 e^t dt = F\left(0,-\frac{1}{2}\right) - F\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}} - \frac{13}{4}e^{-\frac{1}{2}}。$$

例3　计算定积分$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}} e^t \sin \pi t dt$。

解　查含参变量的拉普拉斯变换公式表得

$$L[\sin \pi t, \lambda] = \frac{\pi \cos \lambda\pi + s \sin \lambda\pi}{s^2 + \pi^2}。$$

由含参变量的拉普拉斯变换的齐次性质和位移性质得

$$L\left[e^t \sin \pi t, \lambda\right] = e^{\lambda} L\left[e^{t-\lambda} \sin \pi t, \lambda\right] = \frac{\pi \cos \lambda\pi + (s-1)\sin \lambda\pi}{(s-1)^2 + \pi^2} e^{\lambda} = F(s,\lambda),$$

则$F(0,\lambda) = \dfrac{\pi \cos \lambda\pi - \sin \lambda\pi}{1+\pi^2} e^{\lambda}$。

再由公式（2）得

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{4}} e^t \sin \pi t dt = F\left(0,-\frac{1}{3}\right) - F\left(0,\frac{1}{4}\right) = \frac{\left(\pi+\sqrt{3}\right)e^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{2}\left(\pi-1\right)e^{\frac{1}{4}}}{2\left(1+\pi^2\right)}。$$

例4　计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{2t} \cos 3t dt$。

解　查含参变量的拉普拉斯变换公式表得

$$L\left[\cos 3t, \lambda\right] = \frac{s\cos 3\lambda - 3\sin 3\lambda}{s^2 + 9}。$$

由含参变量的拉普拉斯变换的齐次性质和位移性质得

$$L\left[e^{2t} \cos 3t, \lambda\right] = e^{2\lambda} L\left[e^{2(t-\lambda)} \cos 3t, \lambda\right] = \frac{(s-2)\cos 3\lambda - 3\sin 3\lambda}{(s-2)^2 + 9} e^{2\lambda} = F(s,\lambda),$$

则$F(0,\lambda) = -\dfrac{2\cos 3\lambda + 3\sin 3\lambda}{13} e^{2\lambda}$。

再由公式（2）得

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{2t} \cos 3t dt = F\left(0,-\frac{\pi}{6}\right) - F\left(0,\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{13}\left(e^{\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{\pi}{3}}\right)。$$

3　结语

一般地，求连续函数$f(t)$的定积分$\int_a^b f(t)dt$，可以采用牛顿-莱布尼茨公式。但对于被积函数较复杂的定积分，直接求出被积函数的原函数比较困难，不妨利用本文的公式（2）求解。当然采用本文的方法直接计算出被积函数的含参变量的拉普拉斯变换也具有一定难度，但通过查公式表并结合含参变量的拉氏变换的有关性质，能较容易求出被积函数的含参变量的拉普拉斯变换（即象函数）。因此，本文计算定积分的新公式，不仅具有一定的理论价值，同时还具有一定的实用值。

参考文献：

[1] 阳凌云，符云锦，邓光辉. 含参变量的拉普拉斯变换及其应用[J]. 湖南工业大学学报，2012，26(1)：1-5.
Yang Lingyun，Fu Yunjin，Deng Guanghui. The Laplace Transform with Parameters and Its Application[J]. Journal of Hunan University of Technology，2012，26(1)：1-5.

[2] 焦存德. 牛顿-莱布尼茨公式条件的研究[J]. 济南职业学院学报，2014(1)：57-58.

（下转第66页）