doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2014.04.002

特殊拟 α - 双对角占优矩阵的讨论及其应用

贾明辉

（内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028043）

摘　要：定义了特殊拟α-双对角占优矩阵，给出了严格特殊拟α-双对角占优矩阵的等价表征。由此得到非奇异H-矩阵的判定条件，并用数值例子说明了判定条件的有效性。

关键词：非奇异H-矩阵；α-双对角占优矩阵；特殊拟α-双对角占优矩阵

中图分类号：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2014)04-0008-04

Discussion on Special Quasi α-Double Diagonally Dominant Matrix and Its Applications

Jia Minghui

（School of Mathematics，Inner Mongolia University for the Nationalities，Tongliao Inner Mongolia 028043，China）

Abstract：The special α-double diagonally dominant matrix is defined, and an equivalent representation for strictly special quasi α-double diagonally dominant matrix is presented. And the judgment condition for nonsingular H-matrices is obtained. The efficiency of the judgment condition is illustrated with a numerical example.

Keywords：nonsingular H-matrix; α-double diagonally dominant matrix; special quasi α-double diagonally dominant matrix

0　引言

非奇异H-矩阵是计算数学、数学物理、控制理论、电力系统理论、经济数学等领域中具有广泛应用的重要矩阵类。在实际应用中，如何简便地判别一个矩阵是否为非奇异H-矩阵，一直是学者们关注的热点问题。众所周知，对角占优矩阵、双对角占优矩阵、按回路对角占优矩阵、α-对角占优矩阵、α-双对角占优矩阵、按回路α-对角占优矩阵以及相应的不可约及非零元链形式等均为非奇异H-矩阵。

近年来国内外学者做了不少工作，提出了一些实用的判定非奇异H-矩阵的条件[1-12]。本文将定义特殊拟α-双对角占优矩阵，给出严格特殊拟α-双对角占优矩阵的等价表征，由此得到非奇异H-矩阵的判定条件，从而推广了文献[1-12]中的定理2，并用数值例子说明判定条件的有效性。

1　预备知识

设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$为$n$阶复方阵，记

$$R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|,C_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ji}|;$$

$$P_i(\boldsymbol{A})=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}^{n}|a_{ik}|\frac{R_k(\boldsymbol{A})}{|a_{kk}|},Q_i(\boldsymbol{A})=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}^{n}|a_{ki}|\frac{R_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|};$$

收稿日期：2014-05-23

基金项目：内蒙古民族大学科学研究基金资助项目（NMD1303）

作者简介：贾明辉（1977-），女，内蒙古通辽人，内蒙古民族大学副教授，硕士，主要研究方向为数值代数，
E-mail：jiaminghui1978@163.com

$N\triangleq\{1,2,\cdots,n\}$, $M\triangleq\{(i,j)|i\neq j,\ i\in N,\ j\in N\}$。

若 $|a_{ii}|\geqslant(>)R_i(\boldsymbol{A})(i\in N)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为（严格）对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in D_0(\boldsymbol{A}\in D)$；若 $|a_{ii}a_{jj}|\geqslant(>)R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})(\forall(i,j)\in M)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为（严格）双对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in DD_0(\boldsymbol{A}\in DD)$；若存在一正对角阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使 $\boldsymbol{AX}\in D$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in\tilde{D}$[2-3]。

众所周知，H-矩阵也可等价地定义为广义严格对角占优矩阵。因为非奇异 H-矩阵主对角元素非零，所以本文总假定所涉及矩阵主对角元素 $a_{ii}\neq 0$ 且 $R_i(\boldsymbol{A})>0(\forall i\in N)$。

定义 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若存在某一参数 $\alpha\in[0,1](\alpha_0\in[0,1])$，使

$|a_{ii}a_{jj}|\geqslant(>)[R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[C_i(\boldsymbol{A})C_j(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}(\forall(i,j)\in M)$，则称 A 为（严格）α-双对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in DD(\alpha_0)(\boldsymbol{A}\in DD(\alpha))$；

若存在一正对角阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使

$$\boldsymbol{AX}\in D\tilde{D}(\alpha),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为广义 α-双对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in D\tilde{D}(\alpha)$。

定义 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若

$$R_i(\boldsymbol{A})>P_i(\boldsymbol{A})(\forall i\in N),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为特殊拟对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in S\tilde{D}$；

若 $R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})>P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})(\forall(i,j)\in M)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为特殊拟双对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}$。

定义 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若存在某一参数 $\alpha\in[0,1]$，使

$R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})>[P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})]^{\alpha}[Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})]^{1-\alpha}(\forall(i,j)\in M)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为特殊拟 α-双对角占优矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}(\alpha)$。

引理 1[5-9]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}(\alpha)$，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵。

2　主要结论

引理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}(\alpha)$，则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵。

证　取正对角阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_i=\dfrac{R_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}(\forall i\in N)$，并记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=(b_{ij})$，则对任意 $i\in N$ 有

$$b_{ii}=R_i(\boldsymbol{A});$$

$$R_i(\boldsymbol{B})=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}|b_{ik}|=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}^{n}|a_{ik}|\frac{R_k(\boldsymbol{A})}{|a_{kk}|}=P_i(\boldsymbol{A});$$

$$C_i(\boldsymbol{B})=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}|b_{ki}|=\sum_{k\in N\setminus\{i\}}|a_{ki}|\frac{R_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}=Q_i(\boldsymbol{A})。$$

由 $\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}(\alpha)$ 易知

$$|b_{ii}||b_{jj}|>[R_i(\boldsymbol{B})R_j(\boldsymbol{B})]^{\alpha}[C_i(\boldsymbol{B})C_j(\boldsymbol{B})]^{1-\alpha}(\forall(i,j)\in M)。$$

由定义 1 及引理 1 可知 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异 H-矩阵。又由 H-矩阵的等价定义可知，存在正对角阵 $\boldsymbol{X}_1$，使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{XX}_1)=\boldsymbol{AXX}_1=\boldsymbol{BX}_1$ 为严格对角占优矩阵。显然 $\boldsymbol{XX}_1$ 仍为正对角矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵。

注意　当 $\alpha=0(\alpha=1)$ 时，$\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\in SD\tilde{D})$ 均为非奇异 H-矩阵，所以下文中只对 $\alpha\in(0,1)$ 进行讨论。

记

$M_1=\{(i,j)|P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})<R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})<Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\}$；

$M_2=\{(i,j)|Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})<R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})<P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\}$；

$M_3=\{(i,j)|R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})\geqslant Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})>P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\}$；

$M_4=\{(i,j)|R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})\geqslant P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})>Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\}$；

$M_5=\{(i,j)|R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})>Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})=P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\}$；

$$M_6=\{(i,j)|P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\geqslant R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}),\ Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\geqslant R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})\}。$$

显然有 $M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4\cup M_5\cup M_6$。

$\forall(i,j)\in M_1$ 记

$$\alpha_{ij}=\frac{R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})}{P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})},$$

$$\beta_{ij}=\frac{Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})}{R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})},$$

$$\gamma_{ij}=\frac{Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})}{P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})},$$

则 $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}\beta_{ij}$。

$\forall(i,j)\in M_2$ 记

$$x_{ij}=\frac{R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})}{Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})},$$

$$y_{ij}=\frac{P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})}{R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})},$$

$$z_{ij}=\frac{P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})}{Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})},$$

则 $z_{ij}=x_{ij}y_{ij}$。

因此有 $\gamma_{ij}>\alpha_{ij}>1$，$\gamma_{ij}>\beta_{ij}>1$，$z_{ij}>x_{ij}>1$，$z_{ij}>y_{ij}>1$。

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，且 $M_6=\Phi$，如果 M_1, M_2 至少有一个为空集，则 $\boldsymbol{A}\in SD\tilde{D}(\alpha)$。

证 有以下3种情况：

情形1 若$M_1 \neq \Phi$，$M_2=\Phi$，则对任意的$(s, t) \in M_1$，取$\alpha \in \left(1-\min\limits_{(s,t)\in M_1} \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st}, 1\right) \subset (0,1)$，则有

$$R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}) > \left[P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha} \quad (\forall (i,j)\in M)。$$

情形2 若$M_1=\Phi$，$M_2 \neq \Phi$，则对任意的$(i, j) \in M_2$，取$\alpha \in \left(0, 1-\max\limits_{(i,j)\in M_2} \log_{z_{ij}} y_{ij}\right) \subset (0,1)$，则有

$$R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}) > \left[P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha} \quad (\forall (i,j)\in M)。$$

情形3 若$M_1=M_2=\Phi$，则对任意的$(i,j)\in M_3 \cup M_4 \cup M_5$，取$\alpha \in (0, 1)$，总有

$$R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}) > \left[P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha} \quad (\forall (i,j)\in M)。$$

从而根据定义3知$\boldsymbol{A} \in SD\tilde{D}(\alpha)$。

定理2 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$，且$M_6=\Phi$，如果$M_1, M_2$至少有一个为空集，则$\boldsymbol{A}$为非奇异$H$-矩阵。

证 由定理1和引理2知结论成立。

下面的讨论中总假定$M_1 \neq \Phi$，$M_2 \neq \Phi$。

定理3 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则$\boldsymbol{A} \in SD\tilde{D}(\alpha)$的充分必要条件是$M_6=\Phi$，且

$$\max_{(i,j)\in M_2} \log_{z_{ij}} y_{ij} < \min_{(s,t)\in M_1} \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st}。 \quad (1)$$

证 先证必要性。

由定义3，显然有$M_6=\Phi$，且存在$\alpha \in (0, 1)$使得

$$R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}) > \left[P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha} \quad (\forall (i,j)\in M)。$$

对任意的$(s, t) \in M_1$，有

$$\left(\frac{Q_sQ_t}{R_sR_t}\right)^{1-\alpha} < \left(\frac{R_sR_t}{P_sP_t}\right)^{\alpha},$$

所以

$$\left(\frac{Q_sQ_t}{P_sP_t}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{Q_sQ_t}{R_sR_t}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{R_sR_t}{P_sP_t}\right)^{1-\alpha} < \left(\frac{R_sR_t}{P_sP_t}\right)^{\alpha}\left(\frac{R_sR_t}{P_sP_t}\right)^{1-\alpha} = \frac{R_sR_t}{P_sP_t},$$

即

$$\gamma_{st}^{1-\alpha} < \alpha_{st} \left(\forall (s,t)\in M_1\right)。$$

又因为$\gamma_{st}>1$，则

$$-\alpha < \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st} \left(\forall (s,t)\in M_1\right)。$$

对任意的$(i, j) \in M_2$，有

$$\left(\frac{R_iR_j}{Q_iQ_j}\right)^{1-\alpha} > \left(\frac{P_iP_j}{R_iR_j}\right)^{\alpha},$$

所以

$$\left(\frac{P_iP_j}{Q_iQ_j}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{R_iR_j}{Q_iQ_j}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{P_iP_j}{R_iR_j}\right)^{1-\alpha} > \left(\frac{P_iP_j}{R_iR_j}\right)^{\alpha}\left(\frac{P_iP_j}{R_iR_j}\right)^{1-\alpha} = \frac{P_iP_j}{R_iR_j},$$

$$z_{ij}^{1-\alpha} > y_{ij} \quad \left(\forall (i,j)\in M_2\right)。$$

又因为$z_{ij}>1$，则

$$1-\alpha > \log_{z_{ij}} y_{ij} \quad \left(\forall (i,j)\in M_2\right)。$$

综上所述，有

$$\log_{z_{ij}} y_{ij} < \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st} \left(\forall (s,t)\in M_1,\ \forall (i,j)\in M_2\right),$$

即式（1）成立。

再证充分性。

由式（1）及指标集M_1，M_2的取法可知，必存在常数α，满足

$$0< \log_{z_{ij}} y_{ij} < 1-\alpha < \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st} < 1 \quad \left(\forall (s,t)\in M_1,\ \forall (i,j)\in M_2\right)。 \quad (2)$$

由式（2）中的$\log_{z_{ij}} y_{ij} < 1-\alpha$，以及任意的$(i, j) \in M_2$，$z_{ij}=x_{ij}y_{ij}>1$，得

$$R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}) > \left[P_i(\boldsymbol{A})P_j(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_i(\boldsymbol{A})Q_j(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha}。$$

由式（2）中的$1-\alpha < \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st}$，以及对任意的$(s, t) \in M_1$，$\gamma_{st}=\alpha_{st}\beta_{st}>1$，得

$$R_s(\boldsymbol{A})R_t(\boldsymbol{A}) > \left[P_s(\boldsymbol{A})P_t(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_s(\boldsymbol{A})Q_t(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha}。$$

又对任意的$(i,j)\in M_3 \cup M_4 \cup M_5$，及任意的$\alpha \in (0, 1)$，则必有

$$R_s(\boldsymbol{A})R_t(\boldsymbol{A}) > \left[P_s(\boldsymbol{A})P_t(\boldsymbol{A})\right]^{\alpha}\left[Q_s(\boldsymbol{A})Q_t(\boldsymbol{A})\right]^{1-\alpha}。$$

综上所述根据定义3知$\boldsymbol{A} \in SD\tilde{D}(\alpha)$。

定理4 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n\times n}$，且$M_6=\Phi$，如果矩阵$\boldsymbol{A}$满足不等式

$$\max_{(i,j)\in M_2} \log_{z_{ij}} y_{ij} < \min_{(s,t)\in M_1} \log_{\gamma_{st}} \alpha_{st},$$

则$\boldsymbol{A}$为非奇异H-矩阵。

证 由定理3知$\boldsymbol{A} \in SD\tilde{D}(\alpha)$，再由引理2知$\boldsymbol{A}$为非奇异$H$-矩阵。

3 数值算例

例1 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0.2\mathrm{i} & 1.2 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.7\mathrm{i} & 0.3 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$，试判断$\boldsymbol{A}$是否为非

奇异 H-矩阵。

解　由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可得：

$R_1(\boldsymbol{A})=1.4$，$R_2(\boldsymbol{A})=0.2$，$R_3(\boldsymbol{A})=1$。

令正对角矩阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(1.4, 0.2, 1)$，并根据本文的记号有：

$$P_1(\boldsymbol{A})=1.24, P_2(\boldsymbol{A})=0.24, P_3(\boldsymbol{A})=1.04;$$

$$Q_1(\boldsymbol{A})=1.12, Q_2(\boldsymbol{A})=0.1, Q_3(\boldsymbol{A})=1.3。$$

显然不满足文献[1-12]中定理1和定理2的条件，因此无法判断出 $\boldsymbol{A}$ 是否为非奇异 H-矩阵。

经计算可得：

$$M_1=\{(1,3)\},\ M_2=\{(1,2),(2,3)\},$$

$$M_3=M_4=M_5=M_6=\Phi,$$

$$0.339\,6=\max_{(i,j)\in M_2}\log_{z_{ij}}y_{ij}<\min_{(s,t)\in M_1}\log_{\gamma_{st}}\alpha_{st}=0.676\,8。$$

由此可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足定理4的条件，所以 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵。

参考文献：

[1] 黄　政. 非奇异 H-矩阵的一组充分条件[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2006，27(3)：12-14.
Huang Zheng. A Set of Sufficient Conditions for Nonsingular H-Matrices[J]. Journal of Jishou University: Natural Science Edition，2006，27(3)：12-14.

[2] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall Inc，1962：19-170.

[3] Varga R S. On Recurring Theorems on Diagonal Dominance [J]. Linear Algebra and Its Applications，1976，13(1)：1-9.

[4] Li Bishan，Tsatsomeros M J. Doubly Diagonally Dominant Matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications，1997，261(1/2/3)：221-235.

[5] 黄廷祝. Ostrowski定理的推广与非奇 H 矩阵的条件[J]. 计算数学，1994，16(1)：19-24.
Huang Tingzhu. Generalizations of Ostrowski Theorem and Conditions for H-Matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica，1994，16(1)：19-24.

[6] Gan Taibin，Huang Tingzhu. Simple Criteria for Nonsingular H-Matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications，2003，374：317-326.

[7] Cvetković Ljiljana，Kostić Vladimir. New Criteria for Identifying H-Matrices[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2005，180(2)：265-278.

[8] 庹　清，谢清明，刘建州. 非奇异 H-矩阵的实用新判定[J]. 应用数学学报，2008，31(1)：143-151.
Tuo Qing，Xie Qingming，Liu Jianzhou. New Practical Criteria for Nonsingular H-Matrices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2008，31(1)：143-151.

[9] Bru R，Corral C，Gimenez I，et al. Classes of general H-Matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications，2008，429(10)：2358-2366.

[10] 李　敏，李庆春. 非奇异 H-矩阵的新判定准则[J]. 工程数学学报，2012，29(5)：715-719.
Li Min，Li Qingchun. New Criteria for Nonsingular H-Matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2012：29(5)：715-719.

[11] Hadjidimos A. Irreducibility and Extensions of Ostrowski's Theorem[J]. Linear Algebra and Its Applications，2012，436(7)：2156-2168.

[12] Hadjidimos A. A Note on Ostrowski's Theorem[J]. Linear Algebra and Its Applications，2013，439(12)：3785-3795.

（责任编辑：邓光辉）