doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2013.05.002

求解上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划的结构元方法

邓胜岳，汪新凡，杨小娟

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：讨论了一类上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划模型；利用结构元理论，证明了该模型的最优解等价于上层含约束条件的二层多随从线性规划模型最优解；并通过极点搜索法，得到了该模型最优解；最后通过数值算例验证了该方法的可行性。

关键词：二层线性规划；多随从；模糊系数；结构元

中图分类号：O221.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2013)05-0005-04

Solving Fuzzy Bilevel Linear Programming with Multiple Followers under Upper Constraints by Structured Element Method

Deng Shengyue，Wang Xinfan，Yang Xiaojuan

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Fuzzy bilevel linear programming model with multiple followers under upper constraints is discussed; The model optimal solution is proved to be equivalent to the optimal solution of typical bilevel linear programming model with multiple followers by structured element theory. By means of the vertex enumeration approach, the optimal solution of the model is obtained. An illustrative numerical example is provided to demonstrate the feasibility and efficiency of the proposed method.

Keywords：bilevel linear programming；multiple followers；fuzzy coefficient；structured element

1　研究背景

H. V. Stackelberg在其不平衡市场经济一书中，首次提出了二层规划[1]。实践表明，二层规划能有效处理实际分层管理系统的决策问题。一般地，在二层规划模型中，上层决策者为领导者，下层决策者为随从，领导者首先给出一个策略，然后随从根据领导者的策略在约束条件内采取最优策略并反馈给领导者，即上层领导者对下层随从子系统通过控制变量，来实现整个系统的最优化。

在二层规划理论和实践的研究中有两个基本的问题：一是如何根据实际问题建立二层规划模型；二是如何找到二层规划模型的性质和最优解。在实际分层决策系统中，二层规划有广泛的应用，如在工

收稿日期：2013-08-08

基金项目：湖南工业大学自然科学研究基金资助项目（2011HZX17），湖南省科技计划基金资助项目（2012FJ4116），湖南省自然科学基金资助项目（11JJ6068），教育部人文社科基金资助项目（12YJA630114，10YJC630338）

作者简介：邓胜岳（1981-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学讲师，主要研究方向为模糊多层规划，E-mail: dsy110@163.com

业、农业、金融、交通等领域[2-3]。由于实际分层系统中资源、成本、需求等一些元素往往波动较大或难以衡量，因此，研究模糊分层决策系统显得十分必要。在二层规划问题中，系数或变量为模糊数时，则称之为模糊二层规划。例如，M. Sakawa 等人[4-5]研究了合作模糊二层规划问题，在模糊数λ截集的基础上，提出的交互式模糊规划方法解决了这类问题。与此同时，一些研究者也应用模糊集技术有效地解决了模糊二层规划问题，如 S. Shina[6]运用模糊数学规划方法解决了模糊多层线性规划问题。后来，Zhang Guangquan 等人[7-8]研究了具有多目标、多随从特征的模糊二层规划问题，基于隶属函数的模糊集理论提出了相关算法，并解决了该类问题。到目前为止，模糊二层规划仍然是一个具有挑战性的研究领域。

本文利用模糊结构元法[9-12]，证明了上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划问题，等价于经典的二层多随从线性规划问题，运用极点搜索法[13]得到了该问题的最优解。从而避免了运用模糊λ截集理论将模糊二层多随从线性规划问题，转化为二层多随从多目标问题[14]，简化了运算。这为解决模糊二层规划问题提供了一种新方法。

2 模糊结构元表示及结构元加权序

首先，对模糊结构元表示法及其加权序进行简单介绍，详细内容见文献[9-12]。

定义 1[9] 设 E 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集，隶属函数 $E(x)$，$x\in\mathbf{R}$。如果 $E(x)$满足以下性质：

1）$E(0)=1$；

2）当$x\in[-1,0)$时，$E(x)$是单增右连续函数；当$x\in(0,1]$时，$E(x)$是单减左连续函数；

3）当$x\in(-\infty,-1)$或$x\in(1,+\infty)$时，$E(x)=0$；

则称 E 为 $\mathbf{R}$ 上的模糊结构元。

定义 2[9] 若模糊结构元 E 满足：

1）$\forall x\in(-1,1)$，$E(x)>0$；

2）当$x\in[-1,0)$时，$E(x)$是严格单增，当$x\in(0,1]$时，$E(x)$是严格单减；则称 E 为正则模糊结构元。

定义 3[9] 若模糊结构元 E 满足 $E(-x)=E(x)$，则称 E 为对称模糊结构元。

定义 4[12] $\tilde{A}$称为 $\mathbf{R}$ 上的凸模糊集，当且仅当$\forall\lambda\in(0,1]$，λ截集$A_\lambda=\left\{x|x\in\mathbf{R},\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geqslant\lambda\right\}$是 $\mathbf{R}$ 上的凸集。$\tilde{A}$称为 $\mathbf{R}$ 上的闭模糊集，当且仅当$\forall\lambda\in(0,1]$，A_λ是 $\mathbf{R}$ 上的闭集。$\tilde{A}$称为正规模糊集，若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得隶属函数$\mu_{\tilde{A}}(x)=1$。$\tilde{A}$称为 $\mathbf{R}$ 上的有界模糊集，若A_λ是有界的。

定义 5[12] $\mathbf{R}$ 上的凸正规模糊集$\tilde{A}$称为模糊数；凸正规有界闭模糊集$\tilde{A}$称为有界闭模糊数；$\mathbf{R}$ 上全体有界闭模糊数记为$\tilde{N}_c(\mathbf{R})$。

引理 1[9] 设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的任意模糊结构元，具有隶属函数 $E(x)$，$f(x)$是$[-1, 1]$上单调有界函数，则$f(E)$是 $\mathbf{R}$ 上有界闭模糊数。反之，对于给定的正则模糊结构元 E 和任意的有界闭模糊数$\tilde{A}$，总存在一个$[-1, 1]$上的单调有界函数$f(x)$，使得$\tilde{A}=f(E)$，称模糊数$\tilde{A}$是由模糊结构元 E 生成的。

引理 2[9] 若模糊数$\tilde{A}=f(E)$，则$\tilde{A}$的隶属函数为$E\left(f^{-1}(x)\right)$，这里$f^{-1}(x)$是$f(x)$关于变量 x 和 y 的轮换对称函数（若$f(x)$是连续严格单调的，则$f^{-1}(x)$是$f(x)$的反函数）。

定义 6[12] 设$\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\in\tilde{N}_c(\mathbf{R})$，其结构元表达式为

$$\tilde{A}_i=f_i(E)\ ,\ i=1,2,$$

式中，E 是给定的某个正则模糊结构元，隶属函数为 $E(x)$，f_1,f_2是$[-1, 1]$上的同序单调函数（具有相同单调性的函数），则由式

$$\tilde{A}_1\leqslant\tilde{A}_2\Leftrightarrow F\left(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2\right)=\int_{-1}^{1}E(x)\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

确定的关系称为模糊数的结构元加权序，式中“$\leqslant$”为$\tilde{N}_c(\mathbf{R})$上的全序，

引理 3[11] 若模糊数$\tilde{A}=(a, b, c)$，E 为三角模糊结构元

$$E(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0；\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1；\\ 0, & 其他；\end{cases}$$

则根据 E 可得

$$f(x)=\begin{cases}(b-a)x+b, & -1\leqslant x\leqslant 0；\\ (c-b)x+b, & 0<x\leqslant 1；\\ 0, & 其他；\end{cases}$$

因此，$\tilde{A}=f(E)$。

引理 4[12] 设 E 是对称模糊结构元，f_1,f_2是$[-1, 1]$上的同序单调函数，模糊数$\tilde{A}_1=f_1(E)$，$\tilde{A}_2=f_2(E)$，则有

$$\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=f_1(E)+f_2(E),\ \tilde{A}_1-\tilde{A}_2=f_1(E)+f_2^{\tau}(E),$$

$$k\tilde{A}_1=|k|\,f_1^{\tau}(E)。$$

当 $k\geqslant 0$ 时，$f_1^{\tau}(E)=f_1(E)$；

当 $k<0$ 时，$f_1^{\tau}(E)=-f_1(-E)$。

3 上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划模型及其算法

3.1 模型

考虑上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划模型

$$\begin{cases}\min\limits_{x_i} \tilde{Z}_1^1=\sum\limits_{i=1}^{N}\tilde{c}_i^1x_i+\sum\limits_{s=1}^{S}\sum\limits_{j=1}^{M}\tilde{d}_{sj}^1y_{sj},\\ \text{s.t. } \sum\limits_{i=1}^{N}\tilde{a}_{ki}x_i+\sum\limits_{s=1}^{S}\sum\limits_{j=1}^{M}\tilde{b}_{ksj}y_{sj}\leqslant\tilde{e}_k,\\ \text{其中}x_i\text{给定，}y_{sj}\text{是下层解；}\\ \min\limits_{y_{sj}}\tilde{Z}_s^2=\sum\limits_{i=1}^{N}\tilde{c}_{si}^2x_i+\sum\limits_{j=1}^{M}\tilde{d}_{sj}^2y_{sj},\\ \text{s.t. }\sum\limits_{i=1}^{N}\tilde{a}_{ti}^sx_i+\sum\limits_{j=1}^{M}\tilde{b}_{tj}^sy_{sj}\leqslant\tilde{e}_t^s;\\ x_i\geqslant0,\ y_{sj}\geqslant0;\\ i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,M;\\ k=1,2,\cdots,K;\ s=1,2,\cdots,S;\ t=1,2,\cdots,T。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$x_i, y_{sj}\in\mathbf{R}$；

$\tilde{c}_i^1,\tilde{d}_{sj}^1,\tilde{a}_{ki},\tilde{b}_{ksj},\tilde{e}_k,\tilde{c}_{si}^2,\tilde{d}_{sj}^2,\tilde{a}_{ti}^s,\tilde{b}_{tj}^s,\tilde{e}_t^s\in\tilde{N}_{\mathrm{c}}(\mathbf{R})$。

定理1　设$\tilde{Z}_1^1=G_1^1(E)$，$\tilde{Z}_s^2=G_s^2(E)$，$\tilde{c}_i^1=f_i^1(E)$，$\tilde{c}_{si}^2=f_{si}^2(E)$，$\tilde{d}_{sj}^1=F_{sj}^1(E)$，$\tilde{d}_{sj}^2=F_{sj}^2(E)$，$\tilde{a}_{ki}=\varphi_{ki}(E)$，$\tilde{b}_{ksj}=g_{ksj}(E)$，$\tilde{e}_k=\psi_k(E)$，$\tilde{a}_{ti}^s=\varphi_{ti}^s(E)$，$\tilde{b}_{tj}^s=g_{tj}^s(E)$，$\tilde{e}_t^s=\psi_t^s(E)$，$M_1^1=\int_{-1}^1E(t)G_1^1(t)\mathrm{d}t$；若$E$是正则模糊结构元，$G_1^1(t)$，$G_s^2(t)$，$f_i^1(t)$，$f_{si}^2(t)$，$F_{sj}^1(t)$，$F_{sj}^2(t)$，$\varphi_{ti}^2(t)$，$g_{tj}^2(t)$和$\psi_t^s(t)$是$[-1,1]$上的同序单调函数，则模型（1）等价于下述模型（2）：

$$\begin{cases}\min\limits_{x_i} M_1=\sum\limits_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)f_i^1(t)\mathrm{d}t+\\ \qquad\sum\limits_{s=1}^{S}\sum\limits_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)F_{sj}^1(t)\mathrm{d}t,\\ \text{s.t. }\sum\limits_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)\varphi_{ki}(t)\mathrm{d}t+\sum\limits_{s=1}^{S}\sum\limits_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)g_{ksj}(t)\mathrm{d}t\leqslant\\ \qquad\int_{-1}^1E(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,\\ \text{其中}x_i\text{给定，}y_{sj}\text{是下层解；}\\ \min\limits_{y_{sj}}\ M_s^2=\sum\limits_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)f_{si}^2(t)\mathrm{d}t+\sum\limits_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)F_{sj}^2(t)\mathrm{d}t,\\ \text{s.t. }\sum\limits_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)\varphi_{ti}^s(t)\mathrm{d}t+\sum\limits_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)g_{tj}^s(t)\mathrm{d}t\leqslant\\ \qquad\int_{-1}^1E(t)\psi_t^s(t)\mathrm{d}t;\\ x_i\geqslant0,\ y_{sj}\geqslant0;\\ i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,M;\\ k=1,2,\cdots,K;\ s=1,2,\cdots,S;\ t=1,2,\cdots,T。\end{cases}\tag{2}$$

证明　由定义6知，衡量模糊数$\tilde{Z}_1^1$大小的标准是$M_1=\int_{-1}^1E(t)G_1^1(t)\mathrm{d}t$。所以，模型（1）中求$\tilde{Z}_1^1$最小化等价于求$M_1$的最小化，由引理4有

$$\tilde{Z}_1^1=G_1^1(E)=\sum_{i=1}^{N}\tilde{c}_i^1x_i+\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}\tilde{d}_{sj}^1y_{sj}=$$
$$\sum_{i=1}^{N}f_i^1(E)x_i+\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}F_{sj}^1(E)y_{sj}。$$

又因为$G_1^1(t)$，$f_i^1(t)$和$F_{sj}^1(t)$是$[-1,1]$上的同序单调函数，所以有

$$M_1^1=\int_{-1}^1E(t)G_1^1(t)\mathrm{d}t=$$
$$\int_{-1}^1E(t)\left[\sum_{i=1}^{N}f_i^1(t)x_i+\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}F_{sj}^1(t)y_{sj}\right]\mathrm{d}t=$$
$$\int_{-1}^1E(t)\sum_{i=1}^{N}f_i^1(t)x_i\mathrm{d}t+\int_{-1}^1E(t)\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}F_{sj}^1(t)y_{sj}\mathrm{d}t=$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)f_i^1(t)\mathrm{d}t+\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)F_{sj}^1(t)\mathrm{d}t。$$

同理有

$$M_s^2=\int_{-1}^1E(t)G_s^2(t)\mathrm{d}t=$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)f_{si}^2(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)F_{sj}^2(t)\mathrm{d}t。$$

再由引理3和引理4可得

$$\sum_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)\varphi_{ki}(t)\mathrm{d}t+\sum_{s=1}^{S}\sum_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)g_{ksj}(t)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_{-1}^1E(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t,$$
$$\sum_{i=1}^{N}x_i\int_{-1}^1E(t)\varphi_{ti}^s(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{M}y_{sj}\int_{-1}^1E(t)g_{tj}^s(t)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_{-1}^1E(t)\psi_t^s(t)\mathrm{d}t。$$

定理证毕。

3.2　算法

综上所述，求解上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划的结构元的算法描述如下：

第一步　若模糊数为三角模糊数时，根据引理3得到E的表达式，并由$\mu_{\tilde{A}}(t)=E\left(f^{-1}(t)\right)$，求出$f_i^1(\mathrm{t})$，$f_{si}^2(\mathrm{t})$，$F_{sj}^1(\mathrm{t})$，$F_{sj}^2(\mathrm{t})$，$\varphi_{ki}(t)$，$g_{ksj}(t)$，$\psi_k(t)$，$\varphi_{ti}^s(t)$，$g_{tj}^s(\mathrm{t})$，$\psi_t^s(t)$。

第二步　计算$\int_{-1}^1E(t)f_i^1(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)f_{si}^2(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)F_{sj}^1(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)F_{sj}^2(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)\varphi_{ki}(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)g_{ksj}(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)\psi_k(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)\varphi_{ti}^s(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)g_{tj}^s(t)\mathrm{d}t$，$\int_{-1}^1E(t)\psi_t^s(t)\mathrm{d}t$，并代入模型（1）。

第三步　根据定理1将上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划问题（1）转化为上层含约束条件的二层多随从线性规划问题（2），再根据极点搜索法，得到模型（2）的最优解。

第四步　将模型（2）的最优解代入模型（1）中，得到上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划问题的最优解。

4　算例

根据上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划模型，建立上层为单人单目标，下层为双人单目

标，上层领导者和下层随从均有约束条件模型如下：

$$\begin{cases}\min\limits_{x}\ \tilde{Z}_1^1(x,y_{11},y_{21})=\tilde{1}x-\tilde{2}y_{11}-\widetilde{4.1}y_{21},\\ \text{s.t.}\ \ \tilde{1}x+\widetilde{2.9}y_{11}\leqslant\widetilde{4.1},\\ \qquad -\tilde{1}x+\tilde{1}y_{21}\leqslant\tilde{1},\\ \qquad x\geqslant 0,\\ \text{其中}x\text{给定，}y_{11},y_{12}\text{是下层解；}\\ \min\limits_{y_{11}}\ \tilde{Z}_1^2(x_1,x_2,y_{11})=\tilde{1}x+\tilde{1}y_{11},\\ \text{s.t.}\ \ \tilde{1}x-\tilde{1}y_{11}\leqslant\tilde{0},\\ \qquad -\tilde{1}x-\tilde{1}y_{11}\leqslant\tilde{0},\\ \qquad y_{11}\geqslant 0;\\ \min\limits_{y_{21}}\ \tilde{Z}_2^2(x,y_{21},y_{22})=\tilde{1}x+\tilde{1}y_{21},\\ \text{s.t.}\ \ \tilde{1}x+\tilde{1}y_{21}\leqslant\widetilde{4.1},\\ \qquad \tilde{2}x_1-\tilde{5}y_{21}\leqslant\tilde{1},\\ \qquad \tilde{2}x_1+\tilde{1}y_{21}\leqslant\tilde{1},\\ \qquad y_{21}\geqslant 0\text{。}\end{cases}\tag{3}$$

式中三角模糊数$\tilde{0}=(0,0,0)$，$\tilde{1}=(0.75,1,1.25)$，$\tilde{2}=(0,2,4)$，$\widetilde{2.9}=(2,2.9,4.4)$，$\widetilde{4.1}=(3.3,4.1,4.3)$，$\tilde{5}=(4.5,5,5.5)$。

解 根据算法和定理1可知，问题（3）等价于下述问题：

$$\begin{cases}\min\limits_{x}\ M_1^1(x,y_{11},y_{21})=x-2y_{11}-4y_{21},\\ \text{s.t.}\ \ -x+3y_{11}\leqslant 4,\\ \qquad -x+y_{21}\leqslant 1,\\ \qquad x\geqslant 0,\\ \text{其中}x\text{给定，}y_{11},y_{12}\text{是下层解；}\\ \min\limits_{y_{11}}\ M_1^2(x_1,x_2,y_{11})=x+y_{11},\\ \text{s.t.}\ \ x-y_{11}\leqslant 0,\\ \qquad -x-y_{11}\leqslant 0,\\ \qquad y_{11}\geqslant 0;\\ \min\limits_{y_{21}}\ M_2^2(x,y_{21},y_{22})=x+y_{21},\\ \text{s.t.}\ \ x+y_{21}\leqslant 4,\\ \qquad 2x_1-5y_{21}\leqslant 1,\\ \qquad 2x_1+y_{21}\leqslant 1,\\ \qquad y_{21}\geqslant 0\text{。}\end{cases}\tag{4}$$

根据极点搜索法，得到该问题的最优解为：x=2.000 0，y_{11}=2.000 0，y_{21}=0.600 0，M_1^1=−4.400 0，M_1^2=4.400 0，M_2^2=2.600 0，$\tilde{Z}_1^1=\left(\underline{Z}_1^1,Z_1^1,\overline{Z}_1^1\right)=(-9.080\ 0,-4.460\ 0,0.520\ 0)$，$\tilde{Z}_1^2=\left(\underline{Z}_1^2,Z_1^2,\overline{Z}_1^2\right)=(3,4,5)$，$\tilde{Z}_2^2=\left(\underline{Z}_2^2,Z_2^2,\overline{Z}_2^2\right)=(1.950\ 0,2.600\ 0,3.250\ 0)$。

通过本算例的分析和计算可知，利用结构元方法能有效地解决上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划问题，与模糊集λ截集方法相比，本方法简单易行。

5 结语

本文主要讨论了模糊二层线性规划问题中的一般形式，即上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划问题。利用结构元理论中有界实模糊数与[−1,1]上单调函数的同胚性质，给出了模糊结构元加权序的定义，将模糊数的排序转化为单调函数的比较，从而将上层含约束条件的模糊二层多随从线性规划问题转化为经典的二层多随从线性规划问题，使运算得到了简化。

参考文献：

[1] Stackelberg H V. The Theory of the Market Economy[M]. Oxford：Oxford University Press，1952：110−320.

[2] Bialas W F，Karwan M H. Two-Level Linear Programming [J]. Management Science，1984，30(8)：1004−1020.

[3] Kogan K，Tapiero C S. Optimal Co-Investment in Supply Chain Infrastructure[J]. European Journal of Operational Research, 2009，192(1)：265−276.

[4] Sakawa M，Nishizaki I， Uemura Y. Interactive Fuzzy Programming for Multilevel Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters[J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，109(1)：3−19.

[5] Sakawa M，Katagiri H，Matsui T. Stackelberg Solutions for Fuzzy Random Two-Level Linear Programming Through Probability Maximization with Possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems，2012，188(1)：45−57.

[6] Sinha S. Fuzzy Programming Approach to Multi-Level Programming Problems[J]. Fuzzy Sets and Systems，2003，136(2)：189−202.

[7] Zhang Guangquan，Lu Jie，Gao Ya. Fuzzy Bilevel Programming：Multi-Objective and Multi-Follower with Shared Variables[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008，16(S2)，105−133.

[8] Lu Jie，Zhang Guangquan，Dillon Tharam. Fuzzy Multi-Objective Bilevel Decision Making by an Approximation Kth-Best Approach[J]. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing，2008，14(3/4/5)，205−232.

[9] 郭嗣琮. 基于模糊结构元理论的模糊分析数学原理[M]. 沈阳：东北大学出版社，2004：20−160.

Guo Sizong. Principle of Fuzzy Mathematical Analysis Based on Structured Element[M]. Shenyang： Northeastern University Press，2004：20−160.

[10] 郭嗣琮. 模糊数比较与排序的结构元方法[J]. 系统工程理论与实践，2009，29(3)：106−111.

Guo Sizong. Comparison and Sequencing of Fuzzy

（下转第12页）