doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2013.04.001

一阶线性常系数微分方程组初值问题的留数解法

段文喜

（北京师范大学珠海分校 应用数学学院，广东 珠海 519085）

摘　要：通过拉普拉斯变换，把一阶线性常系数微分方程组化为代数方程组，再求出代数方程组的解，此代数方程组的解是含有孤立奇点的复变函数，这些孤立奇点实际上是系数矩阵的特征根。对代数方程组的解与指数函数的乘积施行拉普拉斯逆变换，就得到原微分方程组的解。

关键词：一阶线性常系数微分方程组；初值问题；留数解法

中图分类号：O175.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2013)04-0001-04

Residue Solution to Initial Value Problems of First Order Linear Constant Coefficient Differential Equations

Duan Wenxi

（School of Applied Mathematics, Beijing Normal University Zhuahi Campus，Zhuhai Guangdong 519085，China）

Abstract: By Laplasse transform, first order linear constant coefficient differential equations are transformed into algebraic equations, and the solutions to the algebraic equations are found out. The solutions of the algebraic equations are complex functions with isolated singularities, and these isolated singularities are actually the characteristic roots of coefficient matrix. By performing inverse Laplasse transformation on the solutions of algebraic equations and the product of exponential function, obtains the solutions of the original differential equations.

Keywords: first order linear constant coefficient differential equations; initial value problem; residue solution

在现代科学技术中，许多问题的数学模型是一阶线性常系数微分方程组的初值问题，已有的求解方法和公式[1]要涉及大量的计算过程，因此，实际应用价值不大。本文介绍此类问题的一种简捷的求解方法——留数法。

1　一阶线性常系数齐次微分方程组的留数解法

1.1　初始条件为$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{B}_0$的情形

考虑一阶线性常系数齐次微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t),\\ \boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{B}_0,\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$是$n$阶方阵；

$\boldsymbol{y}(t)=\left(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}_0=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)^{\mathrm{T}}$。

微分方程组（1）的解为[1]

$$\boldsymbol{y}(t)=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}_0,\tag{2}$$

式中$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\boldsymbol{A}^n}{n!}t^n$。

收稿日期：2013-05-26

作者简介：段文喜（1958-），男，宁夏海原人，北京师范大学珠海分校副教授，硕士生导师，主要研究方向为应用数学，E-mail：236304613@qq.com

公式（2）涉及矩阵的乘方及幂级数求和的计算问题，因此，公式（2）实际上是一个理论上的求解公式。下面介绍微分方程组（1）的留数解法，这种方法不仅可简化求解过程，更重要的是给出了这类微分方程组的另外一种解法。

对方程组（1）中的$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)$两边进行拉普拉斯变换，并利用拉普拉斯变换的微分性质得[2]

$$s\boldsymbol{F}(s)-\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(s),\tag{3}$$

式中$\boldsymbol{F}(s)=\left(F_1(s),F_2(s),\cdots,F_n(s)\right)^{\mathrm{T}}$，$F_i(s)=L\left[y_i(t)\right]$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

将式（3）变形得

$$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{F}(s)=\boldsymbol{B}_0。\tag{4}$$

令$|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得$\boldsymbol{A}$的所有特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$（$m\leqslant n$），它们的重数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_m$，$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。

当$s\neq\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$时，$\boldsymbol{F}(s)=(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}_0$，即

$$\boldsymbol{F}(s)=\frac{1}{|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{B}_0,\tag{5}$$

式中$|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$是$s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$的行列式，$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*$是$s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$的伴随矩阵[3]。

$\boldsymbol{F}(s)$是关于复数变量s的有理函数，当$s=\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$时，$\boldsymbol{F}(s)$没意义，即$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是复变函数$\boldsymbol{F}(s)$的孤立奇点。根据拉普拉斯逆变换的定义[2]，$\boldsymbol{F}(s)$的拉普拉斯逆变换$\boldsymbol{y}(t)=L^{-1}[\boldsymbol{F}(s)]$等于$\boldsymbol{F}(s)\mathrm{e}^{st}$在所有孤立奇点的留数之和[2]，即

$$\boldsymbol{y}(t)=\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{Res}_{s=\lambda_k}\left(\frac{1}{|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{B}_0\mathrm{e}^{st}\right)。\tag{6}$$

记$|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$的第$i$行第$j$列元素的代数余子式为$A_{ij}(s)(i,j=1,2,\cdots,n)$，则式（5）变形为

$$\boldsymbol{F}(s)=\frac{1}{D(s)}\begin{pmatrix}A_{11}(s)&A_{21}(s)&\cdots&A_{n1}(s)\\A_{12}(s)&A_{22}(s)&\cdots&A_{n2}(s)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}(s)&A_{2n}(s)&\cdots&A_{nn}(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{D(s)}\left(\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i1}(s),\sum_{i=1}^{n}b_iA_{i2}(s),\cdots,\sum_{i=1}^{n}b_iA_{in}(s)\right)^{\mathrm{T}}=$$

$$\left(\frac{D_1(s)}{D(s)},\frac{D_2(s)}{D(s)},\cdots,\frac{D_n(s)}{D(s)}\right)^{\mathrm{T}},\tag{7}$$

式中：$D(s)=|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$；

$D_j(s)\,(i=1,2,\cdots,n)$是将$D(s)$的第j列用$\boldsymbol{B}_0$替换所得到的行列式。

因此，式（6）可变形为

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_1(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}\\\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_2(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_n(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}\end{pmatrix}。\tag{8}$$

如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$（$m<n$），分别是$s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$的$k_1,k_2,\cdots,k_m$阶重根，$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，则根据$\lambda_i$是$\frac{D_j(s)}{D(s)}$的极点阶数计算$\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}$。当$k_i\geqslant2$且$D_j(\lambda_i)\neq0(1\leqslant j\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant n)$时，$\lambda_i$是$\frac{D_j(s)}{D(s)}$的$k_i$阶极点，根据高阶极点留数的计算法[4]有

$$\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}=\frac{1}{(k_i-1)!}\lim_{s\to\lambda_i}\frac{\mathrm{d}^{(k_i-1)}}{\mathrm{d}s^{(k_i-1)}}\left((s-\lambda_i)^m\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}\right)。$$

如果$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都是$s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$的单根，则当$D_j(\lambda_i)\neq0$ $(j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,n)$时，$\lambda_i$是$\frac{D_j(s)}{D(s)}$的一阶极点，根据一阶极点留数的计算法[4]有

$$\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}=\frac{D_j(\lambda_i)}{R(\lambda_i)}\mathrm{e}^{\lambda_it},$$

式中$R(\lambda_i)=\lim_{s\to s_i}\frac{D(s)}{s-\lambda_i}$。

当$D_j(\lambda_i)=0\,(1\leqslant j\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant n)$时，则

$$D_j(s)=(s-\lambda_i)\varphi(s),D(s)=(s-\lambda_i)\psi(s),$$

式中$\varphi(s)$与$\psi(s)$都是关于s的多项式，且$\varphi(\lambda_i)\neq0$，$\psi(\lambda_i)\neq0$。

$$\lim_{s\to\lambda_i}\frac{D_j(s)}{D(s)}=\lim_{s\to\lambda_i}\frac{(s-\lambda_i)\varphi(s)}{(s-\lambda_i)\psi(s)}=\lim_{s\to\lambda_i}\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}=\frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi(\lambda_i)},$$

所以$s=\lambda_i$是$\frac{D_j(s)}{D(s)}$的可去奇点[4]，也是$\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}$的可去奇点。而可去奇点的留数等于零，即$\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}=0$。为了统一记号，把这种情况下的留数$\operatorname*{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_j(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{st}=0$仍然记为$\frac{D_j(\lambda_i)}{R(\lambda_i)}\mathrm{e}^{\lambda_it}$，且$\frac{D_j(\lambda_i)}{R(\lambda_i)}\mathrm{e}^{\lambda_it}=0$。

有了上述记号，即可将式（8）表示为

$$y(t)=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\frac{D_1(\lambda_k)}{R(\lambda_k)}e^{\lambda_k t}\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{D_2(\lambda_k)}{R(\lambda_k)}e^{\lambda_k t}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{D_n(\lambda_k)}{R(\lambda_k)}e^{\lambda_k t}\end{pmatrix},$$

即方程组（1）的解为

$$y(t)=\begin{pmatrix}\frac{D_1(\lambda_1)}{R(\lambda_1)} & \frac{D_1(\lambda_2)}{R(\lambda_2)} & \cdots & \frac{D_1(\lambda_n)}{R(\lambda_n)}\\ \frac{D_2(\lambda_1)}{R(\lambda_1)} & \frac{D_2(\lambda_2)}{R(\lambda_2)} & \cdots & \frac{D_2(\lambda_n)}{R(\lambda_n)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{D_n(\lambda_1)}{R(\lambda_1)} & \frac{D_n(\lambda_2)}{R(\lambda_2)} & \cdots & \frac{D_n(\lambda_n)}{R(\lambda_n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}。$$

1.2　初始条件为 $y(a)=B_0$ 的情形

考虑一阶线性常系数齐次微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t),\\ y(a)=B_0,\end{cases}\tag{9}$$

式中$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$。

设 $u=t-a_i$，则

$y_i(t)=y_i(u+a_i)=Y_i(u)(i=1,2,\cdots,n)$，

从而

$$\frac{dy_i(t)}{dt}=\frac{dY_i(u)}{dt}=\frac{dY_i(u)}{du}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{dY_i(u)}{du},$$

所以方程组（9）化为

$$\begin{cases}\frac{dY(u)}{du}=AY(u),\\ Y(0)=B_0,\end{cases}\tag{10}$$

式中$Y(u)=(Y_1(u),Y_2(u),\cdots,Y_n(u))^T$。

由式（8）得

$$Y(u)=y(t)=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_1(s)}{D(s)}e^{s(t-a_1)}\\ \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_2(s)}{D(s)}e^{s(t-a_2)}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}_{s=\lambda_i}\frac{D_n(s)}{D(s)}e^{s(t-a_n)}\end{pmatrix},\tag{11}$$

特别地，当$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$都是$D(s)$的单根时

$$y(t)=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\frac{D_1(\lambda_k)}{R(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-a_1)}\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{D_2(\lambda_k)}{R(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-a_2)}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}\frac{D_n(\lambda_k)}{R(\lambda_k)}e^{\lambda_k(t-a_n)}\end{pmatrix}。\tag{12}$$

2　一阶线性常系数非齐次微分方程组初值问题的留数解法

考虑一阶线性常系数非齐次微分方程组的初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+H,\\ y(0)=B_0,\end{cases}\tag{13}$$

式中$H=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^T$是 n 维常数向量。

相应地

$$Ay(t)+H=0\tag{14}$$

是 n 阶非齐次线性方程组。

当 $r(A,H)=r(A)=n$ 时，方程组（14）有惟一的非零解；

当 $r(A,H)=r(A)<n$ 时，方程组（14）有无穷多解。

总之，当方程组（14）有解时，可选取一个非零解 Y^*。

因为 Y^* 的每一个分量都是常数，所以$\frac{dY^*}{dt}=0$，$\frac{dY^*}{dt}=AY^*+H$，即 Y^* 是$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+H$的特解。

定理 1[5]　设 $Y(t)$是$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)$的通解，Y^* 是$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+H$的一个特解，则 $y(t)=Y(t)+Y^*$ 是$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+H$的通解。

定理 2　设 Y^* 是方程组（14）的一个非零解，$Y(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t),\\ y(0)=B_0-Y^*\end{cases}\tag{15}$$

的解，则 $y(t)=Y(t)+Y^*$ 是初值问题（13）的解。

证明　由定理 1 知，$y(t)=Y(t)+Y^*$ 是（13）的解。因 $y(0)=Y(0)+Y^*$，$y(0)-Y^*=Y(0)$，即（15）的初始条件为 $y(0)=B_0-Y^*$ 时，（13）的初始条件为 $y(0)=B_0$。证毕。

根据定理 2，先求出代数方程组（14）的一个非

零解 $\boldsymbol{Y}^*$，再用留数法求出方程组（15）的解 $\boldsymbol{Y}(t)$，则 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Y}(t)+\boldsymbol{Y}^*$ 就是一阶线性常系数非齐次微分方程组（13）的解。

3 解法举例

例1 求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=2y_1-y_2-2\,,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-2y_1+3y_2-6\,,\end{cases} \tag{16}$$

在初始条件 $\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ 下的解。

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$。

首先解线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{H}=0,$$

即解方程组

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix},$$

解之得

$$\boldsymbol{Y}^*=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}。$$

因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1(0)\\\boldsymbol{y}_2(0)\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{Y}^*=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

再用留数法求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=2y_1-y_2\,,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-2y_1+3y_2\end{cases} \tag{17}$$

在初始条件 $\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 下的解。

由 $s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}s-2&1\\2&s-3\end{pmatrix}$，得

$$D(s)=|s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}s-2&1\\2&s-3\end{vmatrix}=(s-1)(s-4)\ 。$$

令 $D(s)=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的2个特征根为 $s_1=1$，$s_2=4$，从而有：

$$D_1(s)=\begin{vmatrix}1&1\\2&s-3\end{vmatrix}=s-5\ ,\ D_1(1)=-4\ ,\ D_1(4)=-1;$$

$$D_2(s)=\begin{vmatrix}s-2&1\\2&2\end{vmatrix}=2s-6,\ D_2(1)=-4,\ D_2(4)=2。$$

$$R(1)=\lim_{s\to1}\frac{D(s)}{s-1}=\lim_{s\to1}\frac{(s-1)(s-4)}{s-1}=-3,$$

$$R(4)=\lim_{s\to4}\frac{D(s)}{s-4}=\lim_{s\to4}\frac{(s-1)(s-4)}{s-4}=3\ 。$$

微分方程组（17）的解为

$$\boldsymbol{Y}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{D_1(1)}{R(1)}&\dfrac{D_1(4)}{R(4)}\\\dfrac{D_2(1)}{R(1)}&\dfrac{D_2(4)}{R(4)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{4}{3}&-\dfrac{1}{3}\\\dfrac{4}{3}&\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^t-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{4t}\\\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^t+\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}。$$

因此，微分方程组（16）的解是

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{Y}(t)+\boldsymbol{Y}^*=\begin{pmatrix}\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^t-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{4t}+3\\\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^t+\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{4t}+4\end{pmatrix}。$$

参考文献：

[1] B. N. 阿诺尔德. 常微分方程[M]. 北京：科学出版社，1985：109.
Arnold B N. Ordinary Differential Equation[M]. Beijing：Science Press，1985：109.

[2] 南京工学院数学教研组. 积分变换[M]. 北京：高等教育出版社，1978：46.
Mathematics Teaching Section of Nanjing Institute of Technology. Integral Transform[M]. Beijing：Higher Education Press，1978：46.

[3] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社，2007：43.
Department of Mathematics of Tongji University. Linear Algebra[M]. Beijing：Higher Education Press，2007：43.

[4] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2003：225.
Zhong Yuquan. The Complex Variable Function Theory [M]. 3rd ed. Beijing：Higher Education Press，2003：225.

[5] 阳凌云，符云锦. 一阶线性微分方程组的解法新探[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(1)：16-19.
Yang Lingyun，Fu Yunjin. A New Investigation on Solution of First-Order Linear Differential Equations[J]. Journal of Hunan University of Technology，2010，24(1)：16-19.

（责任编辑: 邓光辉）