第27卷第3期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.27 No.3
2013年5月 Journal of Hunan University of Technology May 2013

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2013.03.004

# 矩阵的关系及其应用研究

符云锦

（凤凰县 两林学区，湖南 凤凰 416211）

**摘 要**：基于矩阵的相似关系和合同关系，给出矩阵的同变换关系，并得到了一些性质和定理。利用矩阵的同变换关系，解决了求一类变系数线性微分方程组的通解问题。

**关键词**：$\boldsymbol{J}_k(\lambda,\varepsilon)$若尔当型；同分布矩阵；同变换矩阵；通解

**中图分类号**：O151.21 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2013)03-0016-06

## Study on Matrix Relationship and Its Application

Fu Yunjin

（Lianglin School District, Fenghuang County, Fenghuang Hunan 416211, China）

**Abstract**: Based on the matrix of similarity relationship and contract relationship, presents the matrix of same transformation relationship, and obtains some properties and theorem. By means of same transformation relationship, gives the general solution for a kind of variable coefficient linear differential equations.

**Keywords**: Jordan form of $\boldsymbol{J}_k(\lambda,\varepsilon)$; same distribution matrix; same transformation matrix; general solution

## 1 预备知识

记$K$为数域，$M_n$为数域$K$上的$n$阶方阵的集合，$\lambda(\boldsymbol{A})$为矩阵$\boldsymbol{A}$的所有特征根。

**定义1**[1-3] 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是数域$K$上的$n$阶方阵，如果存在数域$K$上的一个可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}, \tag{1}$$

则称$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似，记为$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

**定义2**[1-3] 设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是数域$K$上的$n$阶方阵，如果存在数域$K$上的一个可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}, \tag{2}$$

则称$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$合同，记为$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$。

显然，矩阵的相似关系和合同关系都是等价的。

在式（1）中，若$\boldsymbol{B}$是若尔当标准型矩阵，则矩阵$\boldsymbol{A}$可若尔当标准化；若矩阵$\boldsymbol{A}$的特征根是单根，则矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化。

**定义3**[4] 设$\boldsymbol{T}\in M_n$为可逆矩阵，矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in M_n$，若通过变换

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}, \tag{3}$$

使$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$都能化成若尔当标准型，且对应的若尔当块的阶数相同，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵。

本文对2个以上（包括2个）矩阵进行研究，给出新的同变换矩阵的定义，由此得出一系列结论，并将其应用于解决数学问题。

## 2 若尔当型矩阵

**定义4** 形如$\begin{pmatrix}\lambda & \varepsilon & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$ $(\varepsilon\geqslant 0)$的矩阵称

**收稿日期**：2012-07-18

**作者简介**：符云锦（1984-），男，湖南泸溪人，湖南省凤凰县两林学区教师，主要研究方向为初等数学，微分方程，分析学及其应用，E-mail：fuyunjin1988@yahoo.cn

为若尔当型矩阵块，记为$\boldsymbol{J}_k(\lambda,\varepsilon)$。

若$\varepsilon\in\mathbf{N}$，则称$\boldsymbol{J}_k(\lambda,\varepsilon)$为$\varepsilon$格若尔当块；若$\varepsilon=1$，则称$\boldsymbol{J}_k(\lambda,1)$为若尔当标准型，简记为$\boldsymbol{J}_k(\lambda)$；若$\varepsilon=0$，则称$\boldsymbol{J}_k(\lambda,0)$为对角矩阵。

**定理1**[2]　设$\boldsymbol{A}\in M_n$是给定的复矩阵，又设$\varepsilon>0$是已知的，则存在一个可逆矩阵$\boldsymbol{T}\in M_n$使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1,\varepsilon) & & & \\ & \boldsymbol{J}_{n_2}(\lambda_2,\varepsilon) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k,\varepsilon)\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1},\quad(4)$$

其中$\sum_{i=1}^{k}n_i=n$。

**定义5**　式（4）中，若$\varepsilon\in\mathbf{N}$，则称$\boldsymbol{A}$是$\varepsilon$格的。

根据定义4和定理1，易得到下面的定理2和定理3。

**定理2**　设$\boldsymbol{A}\in M_n$是给定的复矩阵，那么存在2个可以通过变换（3）化成若尔当型，且对应的若尔当块的阶数相同的复矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\in M_n$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2。\quad(5)$$

**定理3**　若矩阵$\boldsymbol{A}\in M_n$是$\varepsilon$格的，则存在$\varepsilon$个可以通过变换（3）化成若尔当标准型，且对应的若尔当块的阶数相同的复矩阵列$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_\varepsilon$，使得

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{\varepsilon}\boldsymbol{A}_i。\quad(6)$$

## 3　同分布矩阵

**定义6**　若2个矩阵$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in M_n$所有特征根的个数相等，且其对应的重数也相等，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的特征根是同分布的，简称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同分布。

**定义7**　若$n$个矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_n\in M_n$所有的特征根个数相等，且其对应的重数也相等，则称矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_n$的特征根是同分布的，简称矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_n$同分布。

根据定义6和定义7，易得关于同分布矩阵的性质定理4~10。

**定理4**　在数域$K$上的$n$阶方阵的同分布关系是等价的。

**定理5**　若矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同分布，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$也同分布。

**定理6**　若可逆矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同分布，则$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$也同分布。

**定理7**　若$\boldsymbol{A}\in M_n$，$m\in\mathbf{N}^+$，则$\boldsymbol{A}^m$与$\boldsymbol{A}$同分布。

**定理8**　设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in M_n$，$m, n\in\mathbf{N}^+$，若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同分布，则$\boldsymbol{A}^m$与$\boldsymbol{B}^n$也同分布。

**定理9**　设$\boldsymbol{A}\in M_n$是给定的复矩阵，那么存在2个同分布矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\in M_n$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2。$$

**定理10**　若矩阵$\boldsymbol{A}\in M_n$是$\varepsilon$格的，则存在$\varepsilon$个同分布矩阵列$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_\varepsilon$，使得

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{\varepsilon}\boldsymbol{A}_i。$$

## 4　同变换矩阵

**定义8**　设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}\in M_n$，且$\boldsymbol{T}$可逆，经过变换（3）后，若$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$都是若尔当型矩阵，且对应的若尔当块的阶数相同，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵，记为$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$。

**定义9**　在定义8中，若$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}^{-1}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是正交同变换矩阵，记为$\boldsymbol{A}f^{\perp}\boldsymbol{B}$。

**定理11**　矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵的必要条件是，矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同分布的。

**证明**　由同变换矩阵得定义可知，矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$必定所有的特征根的个数相等，且其对应的重数也相等，故矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同分布的。

**定理12**　矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵的充要条件是，$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是同分布的。

**证明**　先证必要性。

设矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵，由定义8可知，$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是对应的若尔当块的阶数相同的若尔当型矩阵。再由定义6可知，$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是同分布的。

再证充分性。

因为$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是同分布的，所以$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是对应的若尔当块的阶数相同的若尔当型矩阵，即$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$都是若尔当型矩阵，且对应的若尔当块的阶数相同。由定义8知，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵。

**定理13**　在数域$K$上的$n$阶方阵的同变换关系是等价的。

**证明**　$\forall\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\in M_n$，则有：

自反性　显然$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}$是同变换的。

对称性　若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同变换，易知$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$也是同变换的。

传递性　若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同变换，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$同变换，易证$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$也是同变换的。

因此在数域$K$上的$n$阶方阵的同变换关系是等价的。

**定理14**　若$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}f\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

**证明**　记$f^{\mathrm{T}}(A)=(f(A))^{\mathrm{T}}$。由$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$，可知，存在可

逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是同分布的。

根据定理5知，$f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A})$与$f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B})$是同分布的，而

$$f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A})=\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},$$

$$f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B})=\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P},$$

式中$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$。

由定理12知$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}f\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

**定理15** 设矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$可逆，若$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}f\boldsymbol{B}^{-1}$。

**证明** 记$f^{-1}(A)=(f(A))^{-1}$。由$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$可知，存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$是同分布的。

根据定理6知，$f^{-1}(\boldsymbol{A})$与$f^{-1}(\boldsymbol{B})$是同分布的，而

$$f^{-1}(\boldsymbol{A})=\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T},$$

$$f^{-1}(\boldsymbol{B})=\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right)^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{T}。$$

由定理12知$\boldsymbol{A}^{-1}f\boldsymbol{B}^{-1}$。

**定理16** 若$\boldsymbol{A}\in M_n$，$m\in\mathrm{N}^+$，则$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{A}^m$。

**证明** 设$\boldsymbol{T}$为可逆矩阵，由定理7知$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^m$与$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$同分布。又

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^m=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T},$$

故$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$是同分布的。

由定理12知$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{A}^m$。

**定理17** 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n$, $m, n\in\mathbf{N}^+$, 若$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{A}^m f\boldsymbol{B}^n$。

**证明** 因$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$，由定理11知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同分布的。又$m, n\in\mathbf{N}^+$，由定理8知存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^m$与$(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T})^n$也同分布。而

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^m=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T},$$

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}\right)^n=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{T},$$

$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{T}$是同分布的。

由定理12知$\boldsymbol{A}^m f\boldsymbol{B}^n$。

特别地，当$m=n$时，即若$\boldsymbol{A}f\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}^m f\boldsymbol{B}^m$。

**定理18** 设$\boldsymbol{A}\in M_n$是给定的复矩阵，则存在2个同变换矩阵$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\in M_n$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2。$$

**证明** 在定理2中，易知矩阵$\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$满足

$$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{T}。$$

由定理9知，矩阵$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}_2$是同分布的，即$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{T}$是同分布的。

由定理12知，$\boldsymbol{A}_1$与$\boldsymbol{A}_2$是同变换的。

**定理19** 若矩阵$\boldsymbol{A}\in M_n$是$\varepsilon$格的，则存在$\varepsilon$个同变换矩阵列$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_\varepsilon$，使

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{\varepsilon}\boldsymbol{A}_i。$$

**证明** 在定理3中，易知矩阵列$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_\varepsilon$满足

$$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{T}, i=1, 2,\cdots, \varepsilon。$$

由定理10知，矩阵列$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_\varepsilon$是同分布的，即$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_2\boldsymbol{T},\cdots, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{J}_\varepsilon\boldsymbol{T}$是同分布的。

由定理12知，矩阵列$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2,\cdots, \boldsymbol{A}_\varepsilon$是同变换的。

## 5 同变换关系的应用

下面利用矩阵同变换关系求解一类线性微分方程组。

**定义10** 设$n$阶矩阵

$$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}_0 f_0(x)+\boldsymbol{A}_1 f_1(x)+\cdots+\boldsymbol{A}_n f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{A}_i f_i(x),$$

其中$f_i(x)$为可积函数，若$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1,\cdots, \boldsymbol{A}_n$是同变换的，则称矩阵$\boldsymbol{A}(x)$为同变换矩阵。

**定义11** 若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}(x)$为同变换矩阵，则称线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x) \tag{7}$$

为同变换一阶线性微分方程组。

对变系数一阶线性微分方程组的求解，至今尚无一般方法。文献[4]对2类变系数线性微分方程组给出了解答，但并不完善，本文对其解法进行改进和延伸。

要求一阶线性微分方程组（7）的通解，首先要求出其所对应的一阶线性齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y} \tag{8}$$

的通解，再利用常数变易法[5-6]和待定系数法[5-6]求出（7）的通解。

为了书写及证明的方便，记

$$M=\varepsilon\sum\int f_i(x)\mathrm{d}x,$$

$$N=\sum\frac{x^{i+1}}{i+1},$$

$$L=\frac{x^{n+1}}{n+1}。$$

**定理20** 若$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换矩阵，且矩阵$\boldsymbol{A}(x)$中$\boldsymbol{A}_i$的特征单根$\lambda_j^{(i)}$所对应的特征向量为$\boldsymbol{T}_j$（$i=0, 1,\cdots, n$; $j=1, 2,\cdots, n$），则一阶线性齐次微分方程组（8）的通解为

$$\boldsymbol{Y}(x)=\sum C_j \mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}\boldsymbol{T}_j。 \tag{9}$$

**证明** 因为矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换矩阵，所以根据定理19可知，存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得

$$T^{-1}A(x)T=\begin{pmatrix}\sum\lambda_1^{(i)}f_i(x)&&&\\&\sum\lambda_2^{(i)}f_i(x)&&\\&&\ddots&\\&&&\sum\lambda_n^{(i)}f_i(x)\end{pmatrix}。$$

利用变换 $Y=TZ$，则有

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}=T^{-1}A(x)TZ,$$

即

$$\begin{pmatrix}Z_1'\\Z_2'\\\vdots\\Z_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\lambda_1^{(i)}f_i(x)&&&\\&\sum\lambda_2^{(i)}f_i(x)&&\\&&\ddots&\\&&&\sum\lambda_n^{(i)}f_i(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_n\end{pmatrix}。\quad(10)$$

易见方程组（10）有 $n$ 个线性无关的解：

$$Z_1(x)=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\sum\lambda_1^{(i)}f_i(x)},$$
$$Z_2(x)=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\sum\lambda_2^{(i)}f_i(x)},$$
$$\vdots$$
$$Z_n(x)=(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\sum\lambda_n^{(i)}f_i(x)}。$$

把这 $n$ 个线性无关的解代回变换中，得到方程组（8）的一个基本解组为

$$Y_j(x)=\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}T_j\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

式中 $T_j$ 是 $T$ 的第 $j$ 列向量。

因此，一阶线性齐次微分方程组（8）的通解为

$$Y(x)=\sum C_j\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}T_j。$$

**推论 1**[4]　若 $f_i(x)=x^i$，即 $n$ 阶矩阵 $A(x)$ 是同变换 0 格等幂矩阵，且矩阵 $A(x)$ 中 $A_j$ 的特征单根 $\lambda_j^{(i)}$ 所对应的特征向量为 $T_j$（$i$=0, 1,⋯, $n$；$j$ = 1, 2,⋯, $n$），则一阶线性齐次微分方程组（8）的通解为

$$Y(x)=C_1\mathrm{e}^{\left[\lambda_1^{(0)}x+\frac{\lambda_1^{(1)}}{2}x^2+\cdots+\frac{\lambda_1^{(n)}}{n+1}x^{n+1}\right]}T_1+C_2\mathrm{e}^{\left[\lambda_2^{(0)}x+\frac{\lambda_2^{(1)}}{2}x^2+\cdots+\frac{\lambda_2^{(n)}}{n+1}x^{n+1}\right]}T_2+\cdots+C_n\mathrm{e}^{\left[\lambda_n^{(0)}x+\frac{\lambda_n^{(1)}}{2}x^2+\cdots+\frac{\lambda_n^{(n)}}{n+1}x^{n+1}\right]}T_n。$$

**推论 2**[7]　若矩阵 $A(x)=Ax^n$，即 $n$ 阶矩阵 $A(x)$ 是同变换 0 格单项等幂矩阵，且 $A$ 的特征单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所对应的特征向量分别为 $T_1$，$T_2$，⋯，$T_n$，则单项等幂线性齐次微分方程组（8）的通解为

$$Y(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1L}T_1+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2L}T_2+\cdots+C_n\mathrm{e}^{\lambda_nL}T_n。$$

**定理 21**　若 $n$ 阶矩阵 $A(x)$ 是同变换矩阵，且矩阵 $A(x)$ 中 $A_i$ 的 $m$ 个不同的特征根 $\lambda_1^{(i)},\lambda_2^{(i)},\cdots,\lambda_m^{(i)}$ 的重数分别为 $k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_m^{(i)}$，则一阶线性齐次微分方程组（8）对于每一个 $\lambda_j^{(i)}$，有 $k_j^{(i)}$（$i$=0, 1,⋯, $n$；$j$ = 1, 2,⋯, $m$）个形如：

$$Y_1(x)=P_1(M)\mathrm{e}^{\lambda_j^{(i)}L},$$
$$Y_2(x)=P_2(M)\mathrm{e}^{\lambda_j^{(i)}L},$$
$$\vdots$$
$$Y_{k_j^{(i)}}(x)=P_{k_j^{(i)}}(M)\mathrm{e}^{\lambda_j^{(i)}L}$$

的线性无关的解，式中 $P_j(M)$ $\left(j=1,2,\cdots,k_j^{(i)}\right)$ 的每一个分量为 $M$ 的次数不高于 $k_j^{(i)}-1$ 的多项式。取遍所有的特征根 $\lambda_j^{(i)}$($j$=1, 2, ⋯, $m$)，就得到方程组（8）的基本解组。

定理 21 的证明与文献[5]中定理 3.14 的证明方法相仿（证明从略）。

**定理 22**　若 $n$ 阶矩阵 $A(x)$ 是同变换矩阵，且矩阵 $A(x)$ 中 $A_i$ 的特征根 $\lambda_j^{(i)}$ 的重数为 $k_j^{(i)}$（$i$=0, 1,⋯, $n$；$j$ = 1, 2,⋯, $m$），则一阶线性齐次微分方程组（8）有 $k_j^{(i)}$ 个形如

$$Y(x)=\left[R_0+R_1M+\cdots+R_{k_j^{(i)}-1}M^{k_j^{(i)}-1}\right]\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}\quad(11)$$

的线性无关的解。式中向量（即 $\lambda_j^{(i)}$ 的 $k_j^{(i)}$ 个特征向量）$R_0,R_1,\cdots,R_{k_j^{(i)}-1}$ 由矩阵方程组

$$\begin{cases}\left(A_i-\lambda_j^{(i)}E\right)R_0=\varepsilon R_1,\\\left(A_i-\lambda_j^{(i)}E\right)R_1=2\varepsilon R_2,\\\quad\vdots\\\left(A_i-\lambda_j^{(i)}E\right)R_{k_j^{(i)}-2}=(k_j^{(i)}-1)\varepsilon R_{k_i-1},\\\left(A_i-\lambda_j^{(i)}E\right)^{k_j^{(i)}}R_0=\mathbf{0},\end{cases}\quad(12)$$

所确定。取遍所有的 $\lambda_j^{(i)}$($j$ = 1, 2,⋯, $m$)就得到方程组（8）的一个基本解组。

**证明**　把式（11）代入方程组（8），得

$$\left[\boldsymbol{R}_1M'+2\boldsymbol{R}_2M'M+\cdots+(k_j^{(i)}-1)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}M'M^{k_j^{(i)}-2}\right]\cdot$$
$$\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}+$$
$$\sum\lambda_j^{(i)}f_i(x)\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1M+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}M^{k_j^{(i)}-1}\right]\cdot$$
$$\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}=$$
$$\sum\boldsymbol{A}_if_i(x)\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1M+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}M^{k_j^{(i)}-1}\right]\cdot$$
$$\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}。$$

消去$\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x}$并比较等式两端$M$的次数，有

$$\begin{cases}\left(\sum\boldsymbol{A}_if_i(x)-\boldsymbol{E}\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{R}_0=\\ \quad\varepsilon\boldsymbol{R}_1\sum f_i(x),\\ \left(\sum\boldsymbol{A}_if_i(x)-\boldsymbol{E}\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{R}_1=\\ \quad 2\varepsilon\boldsymbol{R}_2\sum f_i(x),\\ \quad\vdots\\ \left(\sum\boldsymbol{A}_if_i(x)-\boldsymbol{E}\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\\ \quad\left(k_j^{(i)}-1\right)\varepsilon\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}\sum f_i(x),\\ \left(\sum\boldsymbol{A}_if_i(x)-\boldsymbol{E}\sum\lambda_j^{(i)}\int f_i(x)\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}=\boldsymbol{0}。\end{cases}\tag{13}$$

在式（13）中，对每一个矩阵方程两端比较$f_i(x)$的系数（向量），对任意一个$i$，有矩阵方程组

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_0=\varepsilon\boldsymbol{R}_1,\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_1=2\varepsilon\boldsymbol{R}_2,\\ \quad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\left(k_j^{(i)}-1\right)\varepsilon\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}=\boldsymbol{0}。\end{cases}\tag{14}$$

由于式（14）与式（12）是等价的，故定理得证。

式（12）与式

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}=\boldsymbol{0},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^2\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\boldsymbol{0},\\ \quad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^{k_j^{(i)}-1}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{0},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^{k_j^{(i)}}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0},\end{cases}\tag{15}$$

是等价的，即$\lambda_j^{(i)}$所对应的特征向量为

$$\boldsymbol{T}_{k_j^{(i)}}=\left(\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1},\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2},\cdots,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_0\right)。$$

观察式（14）与式（15）可知，特征向量$\boldsymbol{T}_{k_j^{(i)}}=\left(\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1},\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2},\cdots,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_0\right)$与$\varepsilon$的值无关。

**推论3**[4] 若$f_i(x)=x^i$，且$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换1格等幂矩阵，设矩阵$\boldsymbol{A}(x)$中$\boldsymbol{A}_i$的特征根$\lambda_j^{(i)}$的重数为$k_j^{(i)}$（$i$=0, 1,⋯, $n$；$j=1,2,\cdots,m$），则一阶线性齐次微分方程组（8）有$k_j^{(i)}$个形如

$$\boldsymbol{Y}(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1N+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}N^{k_j^{(i)}-1}\right]\mathrm{e}^{\sum\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}\tag{16}$$

的线性无关的解。式中向量（即$\lambda_j^{(i)}$的$k_j^{(i)}$个特征向量）$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}$由矩阵方程组

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\ \quad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\left(k_j^{(i)}-1\right)\boldsymbol{R}_{k_i-1},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^{k_j^{(i)}}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0},\end{cases}\tag{17}$$

所确定。取遍所有的$\lambda_j^{(i)}$（$j=1,2,\cdots,m$）就得到方程组（8）的一个基本解组。

**推论4**[7] 若$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}x^n$，即$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换1格单项等幂矩阵，且$\lambda_i$是矩阵$\boldsymbol{A}$的$k_i$重根，则单项等幂线性齐次微分方程组（8）有$k_i$个形如

$$\boldsymbol{Y}(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1L+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_i-1}L^{k_i-1}\right]\mathrm{e}^{\lambda_iL}$$

的线性无关的解。式中向量$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{k_i-1}$由矩阵方程组

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\ \left(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\ \quad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_i-2}=(k_i-1)\boldsymbol{R}_{k_i-1},\\ \left(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E}\right)^{k_i}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0},\end{cases}$$

所确定。取遍所有的$\lambda_i$（$i$= 1, 2,⋯, $m$）就得到方程组的一个基本解组。

## 6 结语

在众多的数学教材和参考资料中，一般都只对矩阵的计算、性质、估计、应用以及矩阵之间的相似与合同关系进行研究。本文基于矩阵的相似关系和合同关系，给出了矩阵的同变换关系，并阐述了

其性质。矩阵的相似、合同、同变换3种关系之间的联系如图1所示。利用矩阵的同变换关系，可以解决求一类变系数线性微分方程组的通解问题，这在常微分方程组的解法中，具有一定的理论价值和应用价值。

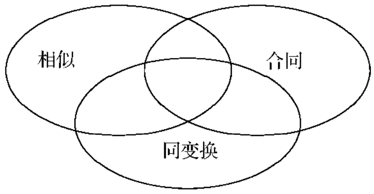


**图1　矩阵3种关系之间的联系**

Fig.1　The contact between 3 kinds of Matrix relationship

## 参考文献：

[1] 张禾瑞，郝鈵新. 高等代数研究[M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2007：272-273，348-354.
Zhang Herui，Hao Bingxin. Higher Algebra Research[M]. 5th ed. Beijing：Higher Education Press，2007：272-273，348-354.

[2] R·A·哈恩，C·R·约翰逊. 矩阵分析[M]. 杨　奇，译. 天津：天津大学出版社，1989：78.
Horn R A，Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Yang Qi Translation. Tianjin：Tianjin University Press，1989：78.

[3] 郑广平. 线性代数与解析几何习题集解析[M]. 上海：复旦大学出版社，2006：38-54.
Zheng Guangping. Linear Algebra and Analytic Geometry Problems Set Analysis[M]. Shanghai：Fudan University Press，2006：38-54.

[4] 阳凌云，符云锦. 线性微分方程组$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的基本解组新探[J]. 湖南工业大学学报，2011，25(1)：40-44.
Yang Lingyun，Fu Yunjin. A New Research On Solution of Linearity Differential Equations$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$[J]. Journal of Hunan University of Technology，2011，25(1)：40-44.

[5] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2006：135-137.
Differential Equation Teaching and Research Section of Northeast Normal University. Ordinary Differential Equations[M]. 2nd ed. Beijing：Higher Education Press，2006：135-137.

[6] 万　庄. 常微分方程习题解[M]. 济南：山东科学技术出版社，2003：170-571.
Wan Zhuang. Solution to Ordinary Differential Equation Exercises[M]. Ji'nan：Shandong Science and Technology Press，2003：170-571

[7] 阳凌云，符云锦. 一阶线性微分方程组的解法新探[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(1)：16-19.
Yang Lingyun，Fu Yunjin. A New Investigation on Solution of First-Order Linear Differential Equations[J]. Journal of Hunan University of Technology，2010，24(1)：16-19.

（责任编辑：邓光辉）