第27卷第2期
2013年3月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.27 No.2
Mar. 2013

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2013.02.021

二阶随机占优约束保险资金资产组合优化

罗晓琴，成央金，杨 柳，余 双

（湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105）

摘 要：建立二阶随机占优约束的保险资金资产组合优化模型，论述模型的罚问题，并在保险资金的收益率和基准收益率都为离散有限分布的情况下，用光滑化方法来处理模型，从而简化了模型的求解。为保险公司的资产组合及最优投资比例提供了一种可借鉴的思路。

关键词：保险资金；资产组合优化；随机占优；光滑化方法

中图分类号：F224.3 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2013)02-0099-06

Portfolio Optimization of Insurance Funds with Second-Order Stochastic Dominance Constraints

Luo Xiaoqin，Cheng Yangjin，Yang Liu，Yu Shuang

（School of Mathematics and Computing Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China）

Abstract: The portfolio optimization model of insurance funds with second-order stochastic dominance constraints is established. The penalty problem of the model is discussed, and under the condition that the return rates and benchmark return rates of insurance funds are discrete finitely distribution, the model is processed by smoothing approach and the solution of the model is simplified. Provides a reference idea for the portfolio of insurance companies and the optimal ratio of investment.

Keywords：insurance funds；portfolio optimization；stochastic dominance；smoothing approach

0 引言

1952年，Markowitz首次提出了对风险资产进行最优化组合的问题，他的均值-方差模型被广泛应用于各种风险资产的投资中，他提出用均值来描述期望收益，用方差来度量收益率的不确定性。投资者试图在确定的收益下，使风险最小，或在风险一定时，使收益最大。保险公司对资金进行投资时，大部分利用Markowitz的均值-方差模型来确定资产组合。但是由于投资者风险偏好（风险爱好，风险厌恶，风险中性）不同，很难确定一种资产组合绝对优于另一种资产组合，因此均值-方差模型有一定的局限性。在文献[1-2]中，资产组合的选择理论依据是随机占优，随机占优的概念与风险厌恶偏好模型相对应，目前随机占优也已普遍应用在经济和金融领域中。文献[3]中引入一个具有二阶随机占优约束的优化模型，并将其应用到风险厌恶资产优化中，这种模型避免了均值-方差模型中由于投资者风险偏好不同而使投资者的选择也不同的问题。文献[4]

收稿日期：2013-01-16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（51075345）
作者简介：罗晓琴（1988-），女，福建龙岩人，湘潭大学硕士生，主要研究方向为运筹学与金融数学，
E-mail：luoxiaoqin1448@126.com

提出了2种处理随机占优约束资产组合优化模型的算法。文献[5]将样本均值的方法应用到随机占优约束资产组合优化中，简化了模型的求解。

当前我国保险资金可用于证券投资、企业债券投资、金融债券投资等方面。保险公司投资管理部门需要解决的问题是，如何在资源有限和相关法规限制的约束下，选择最优的保险资产组合。而将二阶随机占优约束的资产组合优化模型应用到保险资产中，能使保险公司有效地选择资产组合并确定其资金的投资比例。

本文将陈述随机占优的基本概念；讨论财务视角下的资产组合模型及模型的现实性与优化，继而提出随机占优约束保险资金资产组合优化模型；讨论离散有限分布下，随机占优约束保险资金资产组合优化模型的罚问题，再利用光滑逼近函数，将模型进行光滑化处理，使模型的求解变得更容易。

1 基本概念

随机占优关系主要有：一阶随机占优，二阶随机占优和三阶随机占优。二阶随机占优要求投资者不仅是对收益率不会满足，而且是风险厌恶的，所以被广泛应用到风险管理的优化问题中。

假设$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$为决策向量，$\boldsymbol{\xi}$为随机向量，$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$是凹函数，$F(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi});\eta)$和$F(g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi});\eta)$分别为$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$和$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$的积累分布函数。

定义1 如果

$$F(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi});\eta)\leqslant F(g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi});\eta),$$

$\forall\eta\in\mathbf{R}$都成立，则$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$一阶随机占优于$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$，记为$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\succeq_{(1)}g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$。

定义2 如果

$$\int_{-\infty}^{\eta}F(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi});\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant\int_{-\infty}^{\eta}F(g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi});\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$

$\forall\eta\in\mathbf{R}$都成立，则$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$二阶随机占优于$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$，记为$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\succeq_{(2)}g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$。

定义2中的$\int_{-\infty}^{\eta}F(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi});\alpha)\mathrm{d}\alpha$等价于$E\left[\left(\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right)_{+}\right]$，其中

$$\left(\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right)_{+}=\max\left(\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),0\right)。$$

假设资产组合$\boldsymbol{x}$的收益率为$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$，资产组合$\boldsymbol{y}$的收益率为$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$，且收益率都具有有限的期望。

如果$F(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi});\eta)\leqslant F(g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi});\eta),\forall\eta\in\mathbf{R}$，则资产组合$\boldsymbol{x}$一阶占优于资产组合$\boldsymbol{y}$，记为$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\succeq_{(1)}g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$。

如果$\int_{-\infty}^{\eta}F(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi});\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant\int_{-\infty}^{\eta}F(g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi});\alpha)\mathrm{d}\alpha$，$\forall\eta\in\mathbf{R}$，则资产组合$\boldsymbol{x}$二阶占优于资产组合$\boldsymbol{y}$，记为$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\succeq_{(2)}g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$。

2 保险资金资产组合优化模型

2.1 财务视角下的资产组合模型

由于保险公司的业务主要包括保险业务和投资业务，因此将保险公司的利润分为承保利润和投资收益，而投资的渠道又分为风险资产投资和无风险资产投资，相应的收益可分为风险资产收益和无风险资产收益。净资产收益率（return on equity）是衡量公司盈利能力的重要指标（净资产收益率=（净利润÷平均净资产）×100 %），净资产收益率又称股东权益收益率。公司在投资选择时，往往用净资产收益率来衡量投资收益的好坏。建立资产组合模型的目的是为了讨论保险公司在净资产收益率一定的条件下，使净资产收益率的方差最小的问题。

净资产收益率的方差最小化的保险公司资金资产配置最优化模型为

$$\min\sigma_{r_{\mathrm{r,e}}}^{2}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i x_j\sigma_{ij},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}r_{\mathrm{r,e}}=x_1r_{\mathrm{j}}+x_2r_{\mathrm{p}}+x_3r_{\mathrm{f}},\\x_2+x_3=x_1+1,\\x_i\geqslant0,\ i=1,2,3。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\sigma_{r_{\mathrm{r,e}}}^{2}$为保险公司预期的净资产收益率方差；

σ_{ij}为i资产收益率与j资产收益率的协方差；

$r_{\mathrm{r,e}}$为保险公司预期的净资产收益；

$x_1=\dfrac{P_{\mathrm{j}}}{E_{\mathrm{t}}}$，$x_2=\dfrac{Q_{\mathrm{p}}}{E_{\mathrm{t}}}$，$x_3=\dfrac{Q_{\mathrm{f}}}{E_{\mathrm{t}}}$，其中$P_{\mathrm{j}}$表示保费收入，$Q_{\mathrm{p}}$表示保险资金投入到风险资产中的资金金额，$Q_{\mathrm{f}}$表示保险资金投入到无风险资产中的资金金额，$E_{\mathrm{t}}$为当时会计年度的起始股东权益（净资产）；

r_{j}表示承保利润的利润率，r_{p}为保险资金投资在风险资产中的收益率，r_{f}表示保险资金投资在无风险资产中的收益率。

由会计基本等式：资产=负债+所有者权益，则有$Q_{\mathrm{p}}+Q_{\mathrm{f}}=P_{\mathrm{j}}+E_{\mathrm{t}}$成立，等式两边同时除$E_{\mathrm{t}}$，则等式可表示成$x_2+x_3=x_1+1$。

问题（1）运用二次规划求解，解出x_i（i=1, 2, 3）即可。

2.2 保险资金资产组合模型的现实性优化

由于保险业竞争的日趋激烈，使保险费率降低，保险公司的承保利润逐步减小甚至为负，考虑保险公司的总体收益时，承保利润可以忽略不计。因此，假设保险公司的利润仅来自投资收益，此时可考虑保险公司资产组合收益率的最小方差问题。

保险公司资产组合收益率的期望值为

$$\mu=x_1r_1+x_2r_2+\cdots+x_nr_n=\boldsymbol{x}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}},$$

式中：x_i为投资在第i种保险资产中的投资比例，由于负的投资比例意味卖空相应资产，因此在假定无法卖空的情况下$x_i \geqslant 0$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$；

r_i为保险公司投资第i种资产中的预期收益率，$\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$。

保险公司可能的资产分配集为

$X=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1, x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\right\}$。

保险公司资产组合收益率的方差（风险）为

$$\sigma^2=\boldsymbol{x\Omega x}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij},$$

式中$\boldsymbol{\Omega}=\left(\sigma_{ij}\right)_{n\times n}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$为保险公司$n$种投资资产期望收益率的协方差矩阵。

因保险公司资产配置最优化模型是在满足一定投资收益率的情况下，使投资收益率方差最小，故得出如下非线性规划模型：

$$\min\sigma^2=\boldsymbol{x\Omega x}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sigma_{ij},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\mu=x_1r_1+x_2r_2+\cdots+x_nr_n=\boldsymbol{xr}^{\mathrm{T}},\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1,\\ 0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n,\ n\geqslant 2\text{。}\end{cases}$$

2.3　随机占优约束保险资金资产组合优化模型

如果保险公司的基准收益率为$g(\boldsymbol{y},\xi)$，且其期望是有限的，在二阶随机占优的条件下，寻找一新的保险资产收益率$g(\boldsymbol{x},\xi)$，使收益率为$g(\boldsymbol{x},\xi)$的资产组合优于收益率为$g(\boldsymbol{y},\xi)$的资产组合，因此有如下二阶随机占优约束优化问题[3]：

$$\min_{x} E[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})],$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\succeq_{(2)}g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}),\\ \boldsymbol{x}\in X\text{。}\end{cases}\qquad(2)$$

式中：S：$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$g$：$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，都为凹连续函数；

$E[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]$可以是负的期望收益率$-E[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]$;

$\boldsymbol{x}\in X$为决策向量；

$\boldsymbol{y}\in X$为一给定向量；

$\boldsymbol{\xi}:\Omega\to\varXi\subset\mathbf{R}^n$ 是支撑集为$\varXi$ 的概率空间$(\Omega,\mathbb{F},P)$中的随机向量；

$E[\cdot]$是关于概率分布为$\boldsymbol{\xi}$的期望。

问题（2）中的二阶随机占优约束可变形为

$$E\left[(\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))_+\right]\leqslant E\left[(\eta-g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}))_+\right],\forall\eta\in\mathbf{R},$$

式中$(\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))_+=\max(\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),0)$。

因此，上述二阶随机占优约束问题（2）可转化为一个随机半无限规划模型

$$\min_{x} E[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})],$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}h(\boldsymbol{x})=E\left[\eta-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})_+\right]-E\left[\eta-g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})_+\right]\leqslant 0,\\ \qquad\forall\eta\in\mathbf{R};\\ \boldsymbol{x}\in X\text{。}\end{cases}$$

由于占优约束不满足Slater约束品性，因此考虑如下松弛模型：

$$\min_{x} E[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})],$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}h(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ \forall\eta\in[a,b];\\ \boldsymbol{x}\in X\text{。}\end{cases}$$

式中$[a,b]$是$\mathbf{R}$上的近似区间，如果$\boldsymbol{\xi}$有一致有界分布，那么在一些近似区间上，上面2个模型是等价的[5]。

命题1[3]　如果基准收益率$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$为一离散分布，其可能值为$Y_i(i=1,2,\cdots,m)$，则二阶占优约束等价于

$$E\left[\left(Y_i-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right)_+\right]\leqslant E\left[\left(Y_i-g(\boldsymbol{y},\xi)\right)_+\right],$$
$$i=1,2,\cdots,m\text{。}$$

因此，当基准收益率$g(\boldsymbol{y},\xi)$为离散有限分布，其可能值为$Y_i(i=1,2,\cdots,m)$，且$Y_i\in[a,b]$时，模型可变为

$$\min_{x} E[S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})],$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}E\left[(Y_i-g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))_+\right]\leqslant E\left[(Y_i-g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}))_+\right],\\ \quad i=1,2,\cdots,m;\\ \boldsymbol{x}\in X\text{。}\end{cases}$$

3　模型的罚问题及模型的光滑化处理

3.1　离散有限分布下模型的罚问题

当收益率$g(\boldsymbol{x},\xi)$和基准收益率$g(\boldsymbol{y},\xi)$都为一离散有限分布，

$$\boldsymbol{\xi}=\left(\xi^1,\xi^2,\cdots,\xi^m\right)=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right),$$

基准收益率的可能值为$Y_i(i=1,2,\cdots,m)$，$Y_i\in[a,b]$且$S(\boldsymbol{x},\xi)=-g(\boldsymbol{x},\xi)$时，可得如下模型：

$$\min_{x}\left(-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}g\left(\boldsymbol{x},\xi^k\right)\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}h_m^i(\boldsymbol{x})=\\ \quad\dfrac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\left[\left(Y_i-g\left(\boldsymbol{x},\xi^k\right)\right)_+-\left(Y_i-g\left(\boldsymbol{y},\xi^k\right)\right)_+\right]\leqslant 0,\\ \quad i=1,2,\cdots,m;\\ \boldsymbol{x}\in X\text{。}\end{cases}\qquad(3)$$

利用精确的罚函数，将无限约束添加到目标中，问题（3）可变为下面的罚函数问题：

$$\min_{x}\phi\left(\boldsymbol{x},\rho^m\right)=-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}g\left(\boldsymbol{x},\xi^k\right)+\frac{\rho^m}{m}\sum_{i=1}^{m}\max\left(h_m^i(\boldsymbol{x}),0\right),$$

$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{x} \in X。 \tag{4}$$

式中 $\rho^m>0$ 是与 m 有关的罚参数。

假定1 存在一向量 $\boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^n$ 和一正数δ，使得

$$h^{\circ}(\boldsymbol{x},\eta;\boldsymbol{d}) \leqslant -\delta,\ \forall \eta \in [a,b],\ \boldsymbol{x} \in X,$$

式中 $h(\boldsymbol{x},\eta;\boldsymbol{d})$表示 $h(\boldsymbol{x},\eta)$在点 $\boldsymbol{x}$ 处，对于$\eta \in [a,b]$，给定方向为$\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_m)$的Clarke广义方向导数。

这里称假定1为强扩展MFCQ，若δ=0，则假定1为扩展MFCQ，当相关的函数为非凸时，Lagrange乘子的有界性可在扩展MFCQ下推导出来[7]。

定义式（3）的Lagrange函数为

$$\ell_m(\boldsymbol{x},\lambda) = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(\boldsymbol{x},\xi^k) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^m h_m^i(\boldsymbol{x})。$$

命题2[7] 令$\boldsymbol{x}'$为（3）的最优解，且假定1成立，那么对足够大的m，问题（3）满足强扩展MFCQ，且存在非负数$\lambda_i^m(i=1,2,\cdots,m)$，使得

$$\begin{cases} \ell_m'(\boldsymbol{x}',\mu;\boldsymbol{d}) = -\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\nabla g(\boldsymbol{x}',\xi^k)d_k + \\ \qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^m h_m^{i\,\prime}(\boldsymbol{x}';\boldsymbol{d}) \geqslant 0; \\ \boldsymbol{d}=(d_1,d_2\cdots,d_m)\in T_X(\boldsymbol{x}'); \\ h_m^i(\boldsymbol{x}') \leqslant 0,\ \forall i=1,2,\cdots,m; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^m h_m^i(\boldsymbol{x}') = 0; \\ \boldsymbol{x}' \in X。 \end{cases} \tag{5}$$

式中：

$$h_m^{i\,\prime} = \begin{cases} E\left[-\nabla g(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\right],\ \eta - g(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{\xi}) > 0; \\ \max\left\{E\left[-\nabla g(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\right],0\right\},\ \eta - g(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{\xi}) = 0; \\ 0,\ \eta - g(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{\xi}) > 0; \end{cases}$$

$T_x(\boldsymbol{x}')$表示集合X在点$\boldsymbol{x}'$的Bouligrand切锥；$\lambda_i^m(i=1,2,\cdots,m)$表示$\boldsymbol{x}'$对应的Lagrange乘子。

定理1 令假定1成立，$\hat{\boldsymbol{x}}$是（3）满足（5）的一个稳定点，且$\lambda=\lambda_i^m(i=1,2,\cdots,m)$为对应的Lagrange乘子，如果

$$\rho^m \geqslant m\max\lambda_i^m(i=1,2,\cdots,m), \tag{6}$$

那么$\hat{\boldsymbol{x}}$是罚最小化问题（4）的一个稳定点。在这种情况下，当基本函数是凸函数时，稳定点既是（3）的一个全局最优解，也是（4）的全局最优解。

证明 令$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_m)\in T_x(\hat{\boldsymbol{x}})$，则

$$\psi'(\hat{\boldsymbol{x}},\rho^m;\boldsymbol{d}) = -\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\nabla g(\hat{\boldsymbol{x}},\xi^k)d_k + \frac{\rho^m}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_{m+}^i)'(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}),$$

式中$(h_{m+}^i)'(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) = \begin{cases} h_m^{i\,\prime}(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}),\ h_m^i(\hat{\boldsymbol{x}})>0; \\ \max\left\{h_m^{i\,\prime}(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}),0\right\},\ h_m^i(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant 0。\end{cases}$

另外，若假定1成立，则问题（3）满足强扩展MFCQ，也就意味着对于足够大的m，$\max\{\lambda_i^m,i=1,2,\cdots,m\}<\infty$依概率1收敛，即

$$-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\nabla g(\hat{\boldsymbol{x}},\xi^k)d_k + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^m h_m^{i\,\prime}(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) \geqslant 0,$$

$$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2\cdots,d_m)\in T_X(\hat{\boldsymbol{x}})。$$

因此

$$\psi'(\hat{\boldsymbol{x}},\rho^m;\boldsymbol{d}) \geqslant -\sum_{k=1}^{m}\lambda_i^m h_m^{i\,\prime}(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) + \frac{\rho^m}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_{m+}^i)'(\hat{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}) \geqslant 0,$$

对于足够大的m依概率1收敛。最后一个不等式由式（6）及被积函数的非负性可得到。

3.2 模型的光滑化处理

由于模型（3）中具有非光滑算子，当资产数量为n，且有m个相同的时间段，基准收益率的可能值也有m个时，可引入一个新的决策变量$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$代表差额，模型（3）变为

$$\min\left(-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{jk}x_j\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{jk}x_j + s_{ik} \geqslant Y_i, \\ \qquad i=1,2,\cdots,m,\ k=1,2,\cdots,m, \\ \qquad s:[a,b]\times\Omega \to \mathbf{R}; \\ \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} s_{ik} \leqslant \dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(Y_i - g(\boldsymbol{y},\xi^k)\right)_+, \\ \qquad i=1,2,\cdots,m; \\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1; \\ x_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n; \\ s_{ik} \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m,\ k=1,2,\cdots,m。\end{cases} \tag{7}$$

式中S_{ik}表示在k时期，收益率$\sum_{j=1}^{n} r_{jk}x_j$与基准收益率Y_i的差额。

模型（7）是一个线性规划模型，可用线性规划求解器来求解。但该问题的规模将随资产数量n，时间段的个数m和基准收益率可能值的个数m的增加而大幅度增加，因此数值效果不是很好。

例如，有2个资产1和2，从周一到周六的历史收益率如表1所示，基准收益率（%）为：

Y_1=1.1，Y_2=0.9，Y_3=1.0，Y_4=1.2，Y_5=1.0，Y_6=1.3。

表1　2个资产的历史收益率

Table 1　The historical return rates of two assets　%

资产	周一	周二	周三	周四	周五	周六
1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.1	1.2
2	1.3	1.0	0.8	0.9	1.4	1.3

将以上数据代入模型（7）可求出其解。

下面采用光滑化的方法来处理非光滑函数，引入$\max(w,0)(\max(w,0)=(w)_+)$的逼近函数$P(w,u)$。

光滑逼近函数

$$P(w,u)=w+\frac{1}{u}\ln\left(1+e^{-uw}\right),u>0,$$

式中，$P(w,u)=w+\frac{1}{u}\ln\left(1+e^{-uw}\right)$是Sigmoid函数的积分，Sigmoid函数为

$$s(w,u)=\frac{1}{1+e^{-uw}}，u>0。$$

利用$\max(w,0)$的逼近函数$P(w,u)$，则模型（3）可化为

$$\min\left(-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}r_{jk}x_j\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}P\left(Y_i-\sum_{j=1}^{n}x_jr_{jk},u\right)-\\ \quad\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}P\left(Y_i-g\left(\boldsymbol{y},\xi^k\right),u\right)\leqslant 0,\\ \quad i=1,2,\cdots,m;\\ \boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in X。\end{cases}\tag{8}$$

3.3　光滑化罚函数

引理1[8]　光滑逼近函数

$$P(w,u)=w+\frac{1}{u}\ln\left(1+e^{-uw}\right),u>0,$$

具有以下性质：

1）对任何正整数k，$P(w,u)$是k次连续可微的，并且

$$P'(w,u)=\frac{1}{1+e^{-uw}},$$

$$P''(w,u)=\frac{ue^{-uw}}{\left(1+e^{-uw}\right)^2}。$$

2）$P(\cdot,u)$在$\mathbf{R}$上是严格凸函数。

3）$P(w,u)>(w)_+,\forall w\in\mathbf{R}$。

4）$\max\limits_{w\in\mathbf{R}}\left\{P(w,u)-(w)_+\right\}=P(0,u)=\frac{\ln 2}{u}$。

5）$\lim\limits_{|w|\to\infty}P(w,u)-(w)_+=0$，$\forall u>0$。

6）$\lim\limits_{u\to\infty}P(w,u)=(w)_+=0$，$\forall w\in\mathbf{R}$。

7）$P(w,u)\in(0,+\infty)$，$\forall w\in\mathbf{R}$，$u>0$，对$w\in(0,+\infty)$，反函数是有定义的。

8）$P(w,u)>P(w,v)$，$\forall u<v$，$u\in\mathbf{R}$。

引理2　$P(\cdot,u)$关于w一致全局利普希茨连续，$P(w,\cdot)$关于$u\in(0,+\infty)$不一致全局利普希茨连续，且$\forall a,b\in\mathbf{R}$，$u_1,u_2\in\mathbf{R}_+$，$\left|P\left(a,u_1\right)-P\left(b,u_2\right)\right|$无界。

证明　由于$\frac{\partial P(w,u)}{\partial w}=\frac{1}{1+e^{-uw}}$，对任意$w\in\mathrm{R}$有

$$\left|\frac{\partial P(w,u)}{\partial w}\right|=\left|\frac{1}{1+e^{-uw}}\right|\leqslant 1。$$

因此，$\forall a,b\in\mathbf{R}$，$\theta\in[0,1]$，

$$\left|P(a,u)-P(b,u)\right|=\left|\frac{\partial P(a+\theta(b-a),u)}{\partial w}\right|\left|b-a\right|\leqslant\left|b-a\right|,$$

所以$P(\cdot,u)$关于w一致全局利普希茨连续。

由于$\frac{\partial P(w,u)}{\partial u}=-\frac{\ln\left(1+e^{-uw}\right)}{u^2}-\frac{we^{-uw}}{u\left(1+e^{-uw}\right)}$，对于$u>0$，$\left|\frac{\partial P(w,u)}{\partial u}\right|$无界。

因此，存在$M>0$，使得

$$\left|P\left(w,u_1\right)-P\left(w,u_2\right)\right|>M\left|u_2-u_1\right|,$$

$$\forall u_1,u_2\in\mathbf{R}_+，$$

所以$P(w,\cdot)$关于$u\in(0,+\infty)$不一致全局利普希茨连续。

又由于

$$\begin{aligned}&\left|P\left(a,u_1\right)-P\left(b,u_2\right)\right|=\\&\left|P\left(a,u_1\right)-P\left(b,u_1\right)+P\left(b,u_1\right)-P\left(b,u_2\right)\right|\leqslant\\&\left|P\left(a,u_1\right)-P\left(b,u_1\right)\right|+\left|P\left(b,u_1\right)-P\left(b,u_2\right)\right|,\end{aligned}$$

因此，$\forall a,b\in\mathbf{R}$，$u_1,u_2\in\mathbf{R}_+$，$\left|P\left(a,u_1\right)-P\left(b,u_2\right)\right|$无界。

下面利用函数$(w)_+$的近似函数$P(w,u)$，对模型（8）给出一个近似罚函数如下：

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)=&-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}g\left(\boldsymbol{x},\xi^k\right)+\\&\frac{\rho_m}{m}\sum_{i=1}^{m}P\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}P\left(y_i-\sum_{j=1}^{n}x_jr_{jk},u\right)-\right.\\&\left.\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}P\left(y_i-g\left(\boldsymbol{y},\xi^k\right),u\right),u\right),\end{aligned}$$

式中，当$m\to\infty$时，$u\downarrow 0$。

定理2　（$\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)$的性质）

1）对任意固定u，$f(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}g\left(\boldsymbol{x},\xi^k\right)$，只要$f(\boldsymbol{x})$，$h_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,2,\cdots,m$是$k$次连续可微的，则$\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)$是$k$次连续可微的；如果$f(\boldsymbol{x})$，$h_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,2,\cdots,m$是二阶连续可微的，则

$$\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)=\nabla_x f(\boldsymbol{x})+\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1+e^{-uh_i(\boldsymbol{x})}}\nabla_x h_i(\boldsymbol{x}),$$

而且

$$\nabla_{xx}^2\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)=\nabla_{xx}^2 f(\boldsymbol{x})+$$

$$\rho u\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{e}^{-uh_i(x)}}{\left(1+\mathrm{e}^{-uh_i(x)}\right)^2}\nabla_x h_i(\boldsymbol{x})\nabla_x h_i(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}+$$

$$\rho\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-uh_i(x)}}\nabla_{xx}^2 h_i(\boldsymbol{x})。$$

2）若$f(\boldsymbol{x})$，$h_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,2,\cdots,m$是凸函数，则$\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)$也是凸函数，且

$$\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)>\Phi(\boldsymbol{x},\rho)，\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n，$$

其中$\Phi(\boldsymbol{x},\rho)=f(\boldsymbol{x})+\rho\sum_{i=1}^{m}\max\left(h_m^i(\boldsymbol{x}),0\right)$。

3）$\max\limits_{x\in\mathbf{R}^n}(\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)-\Phi(\boldsymbol{x},\rho))=\frac{m\rho}{u}\ln 2$。

4）$\lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(\boldsymbol{x},u,\rho)=\Phi(\boldsymbol{x},\rho)$。

5）若$u_1<u_2$，则

$$\varphi\left(\boldsymbol{x},u_1,\rho\right)>\varphi\left(\boldsymbol{x},u_2,\rho\right)，\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n。$$

关于松弛模型的最优性条件及光滑化模型的数值结果将另文讨论，带交易费用的保险资金资产组合优化模型还有待进一步研究。

参考文献：

[1] Dentcheva D，Ruszczyński A. Semi-Infinite Probabilistic Optimization：First-Order Stochastic Dominance Constraints[J]. Optimization：A Journal of Mathematica Programming and Operations Research，2004，53(5/6)：583−601.

[2] Dentcheva D，Ruszczyński A. Portfolio Optimization with Stochastic Dominance Constraints[J]. Journal of Banking and Finance，2006，30(2)：433−451.

[3] Dentcheva D，Ruszczyński A. Optimization with Stochastic Dominance Constraints[J]. SIAM J. Optim，2003，14(2)：548−566.

[4] Chen C H，Mangasarian O L. Smoothing Methods for Convex Inequalities and Linear Complementarity Problems [J]. Mathematical Programming，1995，71：51−69.

[5] Meskarian Rudabeh，Xu Huifu，Fliege Jörg. Numerical Methods for Stochastic Programs with Second Order Dominance Constraints with Applications to Portfolio Optimization[J]. European Journal of Operational Research，2012，216(2)：376−385.

[6] 王 俊，王 东. 保险公司资产组合与最优投资比例研究[J]. 保险研究，2010(12)：60−67.
Wang Jun，Wang Dong. A Research on the Asset Portfolio and Optimal Investment Ratios for Insurance Companies [J]. Insurance Studies，2010(12)：60−67.

[7] Sun Hailin，Xu Huifu，Wang Yong. A Smoothing Penalized Sample Average Approximation Method for Stochastic Programs with Second Order Stochastic Dominance Constraints[C]//The 8th International Conference on Optimization：Techniques and Applications. Shanghai：Conference Publications，2010：99−100.

[8] 张菊亮，张祥荪. 不等式约束最优化的非光滑精确罚函数的一个光滑近似[J]. 系统科学与数学，2000，20(4)：499−505.
Zhang Juliang，Zhang Xiangsun. A Smoothing Approximation to the Exact Penalty Function for Optimization with Inequality Constraints[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2000，20(4)：499−505.

（责任编辑：邓光辉）