doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2013.01.022

Riccati方程的可积性条件

段　锋，张　兰

（常德职业技术学院 公共课部，湖南 常德　415003）

摘　要：利用平凡的变量代换方法，讨论了Riccati方程的可积性，由此给出了Riccati方程的几个新的可积定理，定理包含了已有的相关结论，从而扩充了Riccati方程可积的判据。

关键词：Riccati方程；可积性；变量代换

中图分类号：O175.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2013)01-0098-04

The Integral Conditions of Riccati Differential Equation

Duan Feng，Zhang Lan

（Department of Basic Courses，Changde Vocational Technical College，Changde Hunan 415003，China）

Abstract：Applies variable substitution method to discuss the Riccati differential equation integrability, and presents several new integrable theorem which contains the existing relevant conclusion，thereby expands integrable Criterion of Riccati equation.

Keywords：Riccati equation; integrability; variable substitution

0　引言

在形如

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{1}$$

的Riccati方程中，若

$$P(x) = A,\ Q(x) = \frac{B}{x},\ R(x) = \frac{C}{x^m},$$

则得形如

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^m}$$

的方程，称为罗森型Riccati方程[1]。

在微分方程理论中，Riccati方程有重要的应用价值，而大多数情况下Riccati方程是不可积的，因此，研究Riccati方程的可积条件有十分重要的理论意义和应用价值。

本文从罗森型Riccati方程出发，给出Riccati方程的可积性结论，从而推广了已有Riccati方程的可积性结论[2-3]。

为了方便，记$P=P(x)\neq 0$，$Q=Q(x)$，$R=R(x)$；并用$\int$表示被积函数的一个确定的原函数；对于方程（1），记$L(y_0) = Py_0^2 + Qy_0 + R - y_0'$。

1　引理

引理1　形如

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^m} \tag{2}$$

的罗森型Riccati方程中，$x>0$，A, B, C和m均为任意常数，且$A\neq 0$。

1）若m=2，则当B为任意实数时，方程（2）是

收稿日期：2012-10-17

作者简介：段　锋（1967-），男，湖南常德人，常德职业技术学院副教授，主要研究方向为微分方程的可积性，微分方程建模与应用，E-mail：duanfengduanfeng@163.com

可积的；

2）若 $m\neq 2$，则当 $B=\frac{(2n+1)m}{2}-2n-2$ 或 $B=2n-\frac{(2n-1)m}{2}-2\ (n\in\mathbf{Z})$时，方程（2）是可积的。

证明 1）作变换$z=xy$，则方程

$$y'=Ay^2+\frac{B}{x}y+\frac{C}{x^m}$$

可化为

$$z'=\frac{1}{x}\left[Az^2+(B+1)z+C\right]。$$

这是一个可分离变量的微分方程，该方程可积，故方程（2）可积。

2）令$z=x^{-B}\cdot y$，将方程（2）化为

$$z'=Ax^Bz^2+Cx^{-B-m}。\tag{3}$$

再令$x=t^{\frac{1}{B+1}}$，则方程（3）又可化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{A}{B+1}z^2+\frac{C}{B+1}t^{\frac{-2B-m}{B+1}}=\begin{cases}-\frac{1}{B+1}\left(Az^2+Ct^{\frac{-4n}{2n+1}}\right), & B=\frac{(2n+1)m}{2}-2n-2;\\ -\frac{1}{B+1}\left(Az^2+Ct^{\frac{-4n}{2n-1}}\right), & B=2n-\frac{(2n-1)m}{2}-2。\end{cases}\tag{4}$$

1725年，D. Bernoulli讨论了形如

$$y'+py^2=qx^m$$

的Riccati方程[1]，并证明了在$m=0$，-2，$\frac{-4r}{2r+1}$，$\frac{-4r}{2r-1}$ $(r\in\mathbf{Z})$时方程可积。由文献[1]可知，方程（4）可积，因此方程（2）一定可积。

2 主要结论

定理1 若$\exists y_0=y_0(x)\in\mathrm{C}^1$及常数$a,b$，使得

$$L(y_0)=\pm a^2P\mathrm{e}^{2\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}\tag{5}$$

成立，则Riccati方程（1）可积。

证明 当$a=0$，即$L(y_0)=-y_0'+Py_0^2+Qy_0+R=0$时，显然$y_0$是方程（1）的一个特解。由文献[1]知，方程（1）可积。

当$a\neq 0$时，记$f=\mathrm{e}^{\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}$，则由条件（5）可得

$$L(y_0)=\pm a^2Pf^2,\tag{6}$$

$$2Py_0+Q=\frac{f'}{f}y。\tag{7}$$

令$z=y-y_0$，方程（1）可化为

$$z'=Pz^2+(2Py_0+Q)z+L(y_0)。\tag{8}$$

再将式（6）和式（7）代入方程（8）并整理得

$$z'=P\left(z^2\pm a^2f^2\right)+\frac{f'}{f}z。$$

由文献[4]可知该方程可积，故方程（1）可积。

定理2 若$\exists y_0=y_0(x)\in\mathrm{C}^1$及常数$a, b$，使得

$$L(y_0)=\frac{\pm a^2P\mathrm{e}^{2\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}}{\left[C+b\int P\mathrm{e}^{\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]^2}\tag{9}$$

成立，则方程（1）可积。

证明 记$u=u(x)=\frac{P\mathrm{e}^{\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}}{\left[C+b\int P\mathrm{e}^{\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]}$，则

$$2Py_0+Q+\frac{P'}{P}=\frac{u'}{u}+bu,\tag{10}$$

$$PL(y_0)=\frac{\pm a^2P^2\mathrm{e}^{2\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}}{\left[C+b\int P\mathrm{e}^{\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]^2}=u^2。\tag{11}$$

对方程（1）作变换$z=P(y-y_0)$，可化为

$$z'=z^2+\left(2Py_0+Q+\frac{P'}{P}\right)z+PL(y_0)。\tag{12}$$

再将（10）和（11）代入方程（12），则方程（12）可化为

$$z'=z^2+\left(\frac{u'}{u}+bu\right)z\pm a^2u^2。\tag{13}$$

最后令$T=\frac{z}{u}$，则方程（13）最终化为一个可积的可分离变量的微分方程

$$T'=u\left(T^2+bT\pm a^2\right),$$

其通积分可由

$$\int\frac{\mathrm{d}T}{T^2+bT\pm a^2}=\int u\mathrm{d}x$$

确定[5]。

在文献[5-6]中都证明了满足该条件时，方程（1）可以化为可分离变量的微分方程，从而方程（1）是可积的。

定理3 若$\exists y_0=y_0(x)\in\mathrm{C}^1$及常数$a, b, \lambda$，使得

$$L(y_0)=\frac{\pm a^2Pe^{2\int(2Py_0+Q)dx}}{\left[C+b\int Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]^\lambda} \quad (14)$$

成立，则当$\lambda=0,\ 2,\ \dfrac{4n}{2n\pm1}(n\in\mathbf{Z})$时，方程（1）可积。

证明　当λ=0时，即为定理1。

当λ=2时，即为定理2。

当b=0时，则与定理1的证明相同。

当$\lambda=\dfrac{4n}{2n+1}$且$b\neq0$时，记

$$b=\frac{(2n+1)(m-2)}{2}=-(k+1),$$

则

$$PL(y_0)=\frac{\pm a^2P^2e^{2\int(2Py_0+Q)dx}}{\left[C+\int\frac{(2n+1)(m-2)}{2}Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]^{\frac{4n}{2n+1}}}=\frac{\pm a^2P^2e^{2\int(2Py_0+Q)dx}}{\left[C-\int(k+1)Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]^{\frac{4n}{2n+1}}}。$$

再记

$$u=u(x)=\frac{Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}}{\left[C-\int(k+1)Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]},$$

因为$\dfrac{(2n+1)(m-2)}{2}=-(k+1)$，则

$$e^{(m-2)\int u dx}=e^{-\frac{m-2}{k+1}\ln\left[C-\int(k+1)Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]}=\left[C-\int(k+1)Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]^{\frac{-(m-2)}{k+1}}=\left[C-\int(k+1)Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]^{\frac{2}{2n+1}}。$$

因此

$$PL(y_0)=\pm a^2u^2\left[C-\int(k+1)Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right]^{\frac{2}{2n+1}}=\pm a^2u^2e^{(m-2)\int u dx}=\pm a_1^{m-2}u^2e^{(m-2)\int u dx}, \quad (15)$$

式中$a_1=a^{\frac{2}{m-2}}$。

因为

$$2Py_0+Q+\frac{P'}{P}=\frac{u'}{u}-(k+1)u, \quad (16)$$

将式（15）和式（16）代入式（12），则方程（12）可化为

$$z'=z^2+\left[\frac{u'}{u}-(k+1)u\right]z\pm a_1^{m-2}u^2e^{(m-2)\int u dx}。 \quad (17)$$

又记$f=f(x)=a_1e^{\int u dx}$，则$u=\dfrac{f'}{f}$，方程（17）可化为

$$z'=z^2+\left[\frac{f''}{f'}-(k+2)\frac{f'}{f}\right]z\pm\left(\frac{f'}{f}\right)^2f^{m-2}。 \quad (18)$$

再令$T=-\dfrac{f^2}{f'}z$，则方程（17）可化为

$$T'=-\frac{f'}{f^2}\left(T^2\pm f^m\right)-k\frac{f'}{f^2}fT。 \quad (19)$$

最后，令$t=\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f(x)}$，则

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{f'}{f^2},\ \frac{dT}{dt}=\frac{dT}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},$$

将其代入（19）得

$$T'=T^2+\frac{kT}{t}\pm t^{-m}, \quad (20)$$

式中$k=2n-\dfrac{(2n+1)m}{2}$。

显然方程（20）满足引理1的条件2），故方程（20）可积。这说明当$\lambda=\dfrac{4n}{2n+1}$时，方程（1）是可积的。

当$\lambda=\dfrac{4n}{2n-1}$时，方程（1）的可积性的证明与$\lambda=\dfrac{4n}{2n+1}$时的证明类似（证明从略）。

证毕。

3　举例

例1　试讨论Riccati方程

$$y'=y^2+\left(\frac{3}{x}-9x^3\right)y-x^6e^{\frac{x^4}{2}}$$

的可积性。

解　因$P(x)=1,\ Q(x)=\dfrac{3}{x}-9x^3, R(x)=x^6e^{\frac{x^4}{2}}$，取$y_0=9x^3$，$a=16^{-\frac{8}{9}}$，$b=9$，$C=0$，$n=4$，则$m=4$。而$e^{\int(2Py_0+Q)dx}=x^3e^{\frac{4x^4}{9}}$，故得

$$L(y_0)=-x^6e^{\frac{x^4}{2}}=\frac{-16^{-\frac{16}{9}}Pe^{2\int(2Py_0+Q)dx}}{\left(9\int Pe^{\int(2Py_0+Q)dx}dx\right)^{\frac{16}{9}}}。$$

由定理3可知该方程可积。

例1中这类方程的可积性，无法用已有的其他Riccati方程的可积性判据直接说明，而由本文给出的定理可判断其可积性。

4　结语

在已有的文献中，通常只讨论了定理3的条件中当$\lambda=2$时，Riccati方程的可积性，本文的结论是对已有些结论的补充和推广。本文的结论中给出了与该结论互不包含的可积性判据：$\lambda=\dfrac{4n}{2n\pm 1}$时的2种可积情况，它们仅在$b=0$，即$\lambda=0$时具有相同结论，故二者具有较好的互补性。

文献[7]给出的可积性判据是：若存在常数a和函数$y_0=y_0(x)$使

$$L\left(y_0\right)=-a^2 P\mathrm{e}^{2\int(2Py_0+Q)\mathrm{d}x}$$

成立，则Riccati方程（1）可积。事实上本文定理1是对该结论的推广。

在定理3中，若取$P=\dfrac{c}{a^2}$，$Q=0$，$y_0=0$，$C=0$，$b=1$，即可得Riccati方程可积的条件[1]。因此，定理3包含了D. Bernoulli的相应结论，在Riccati方程的可积性判断中适应范围更广。

参考文献：

[1] E·卡姆克. 常微分方程手册[M]. 北京：科学出版社，1977：27-28.
Kamke E. Ordinary Differential Equations Manual[M]. Beijing：Science Press，1977：27-28.

[2] 赵临龙. Riccati方程可积性的系列研究成果及应用[J]. 商洛师范专科学校学报，1998，9(4)：29-33.
Zhao Linlong. The Series Research Results and Applied of Integrability for Riccati Equation[J]. Jornal of Shanglou Teachers College，1998，9(4)：29-33.

[3] 阎恩让. 关于Riccati方程的可积条件研究[J]. 西北大学学报：自然科学版，2004，34(5)：513-516.
Yan Enrang. A Study on Integrability Condition of Riccati Equation[J]. Journal of Northwest University：Natural Science Edition，2004，34(5)：513-516.

[4] Li Hongxiang. Elementary Quadratures of Ordinary Differential Equations[J]. The American Mathematical Monthly，1982，89(3)：198-208.

[5] 郑　波. Riccati方程可积条件的探讨[D]. 重庆：西南大学，2009.
Zheng Bo. Discussion on Integrable Conditions of Riccati Equation[D]. Chongqing：Southwest University，2009.

[6] 阎恩让. 关于Riccati微分方程一个新的可积条件的注记[J]. 宝鸡文理学院学报：自然科学版，2004，24(3)：179-180.
Yan Enrang. A Note about a Integrable Condition of Riccati Differential Equation[J]. Journal of Baoji College of Arts and Science：Natural Science Edition，2004，24(3)：179-180.

[7] 冯录祥. 关于Riccati方程可积性条件的讨论[J]. 西安石油大学学报：自然科学版，2011，26(5)：107-110.
Feng Luxiang. Discussion on Integrability Condition of Riccati Differential Equation[J]. Journal of Xi’an Shiyou University：Natural Science Edition，2011，26(5)：107-110.

（责任编辑：邓光辉）