

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.04.008

壅塞空化器设计及其处理污水的可行性研究

张凤华, 徐俊超, 刘海锋, 唐川林, 苏新, 李念

(湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 在分析直管中气液两相混合流的壅塞空化现象, 射流泵发生极限工况时的壅塞空化现象, 经过倒角的圆柱管在定常和非定常流动下的壅塞空化现象, 在阶梯圆管中的稳态绝热闪蒸流中的壅塞空化现象的基础上, 提出了一种新型的空化器——壅塞空化器; 通过采集分析空化噪声和处理模拟污水(苯酚溶液)的实验, 对壅塞空化器在污水处理应用中的可行性进行了初步研究。实验结果表明: 壅塞空化器模拟处理污水的效果较好, 其空化能量比振荡腔喷嘴高, 从而为国内外研究空化发生器开辟了一条新途径。

关键词: 空化; 壅塞; 气液两相临界流; 壅塞空化器; 空化噪声

中图分类号: TP602; X703

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2012)04-0030-07

The Choking Cavitator Design and Its Feasibility Study of Wastewater Treatment

Zhang Fenghua, Xu Junchao, Liu Haifeng, Tang Chuanlin, Su Xin, Li Nian

(School of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract: A new choking cavitator is proposed on the basis of analyzing the choking cavitation phenomena, which occurs in the straight pipe of gas-liquid two-phase flow, in jet pump under the operating limits, in a cylindrical pipe with a sharp edged-corner for the steady and unsteady flows as well as in a pipe involving an abrupt enlargement of steady-state adiabatic flashing flow. Through the analysis of cavitation noise signals collected and the experiments of treating the simulated wastewater (phenol solution), the preliminary research of the feasibility of choking cavitator in the application of wastewater treatment is carried out. The results show that the effect of treating simulated wastewater with the choking cavitator is obvious, and the cavitation energy produced by the choking cavitator is higher than that by self-oscillated chamber nozzle. Thus provides a new way for cavitator study at home and abroad.

Keywords: cavitation; choking; gas-liquid two-phase critical flow; choking cavitator; cavitation noise

0 引言

空化现象是指液体内部局部压力降低时, 液体内部或液固交界面上内含蒸汽、气体或挥发性有机物的空泡初生、长大和溃灭的过程, 是液体特有的一种动力学现象。研究者们对空化的机理进行了大量的研究, 发现空泡溃灭瞬间不仅在局部产生高温、

高压, 还会产生强烈的激波和高速微射流^[1-2], 这样的极端条件将为一般条件下难以实现或者不可能实现的物理、化学过程提供了一种新的非常特殊的物理环境。充分利用空泡溃灭时产生的巨大能量和特殊的物理化学环境可有效降解水中有机污染物^[3]。目前, 对空化在污水处理领域的应用研究主要是超声空化和水力空化。超声空化的能量利用率低, 空

收稿日期: 2012-05-12

作者简介: 张凤华(1960-), 男(彝族), 云南弥勒人, 湖南工业大学教授, 博士, 主要从事水射流技术及应用方面的研究,

E-mail: fenghua387@126.com

化反应器放大效果差,因此,它在工业中的应用受到限制。水力空化在食品杀菌、微生物细胞破碎、水消毒、废水处理等应用中逐渐成为一项新技术^[4]。但是,目前水力空化技术产生的空化区域在水体中的分布范围较小,且不能使空泡有效溃灭(即不能快速溃灭并释放高能量),严重制约了水力空化在工业中的推广应用。

在流动系统中,保持上游压力恒定,当流量不随下游压力减小而增加时,这种现象称为壅塞流动现象。壅塞流动是气液两相流出现临界流时的一种特殊流态,通常发生在流速达到当地声速即马赫数为1^[5-6]的情况下。

当液体管道流中出现空化现象,且空化程度足够形成气液两相流时,在一定条件下,将会同时出现空化和壅塞2种现象。目前,国内外将这2种现象结合起来研究的文献还很少。因此,本文在分析国内外学者对壅塞空化现象研究成果的基础上,针对水力空化处理污水的需要,根据水力空化原理和气液两相临界流理论,提出了一种新型的空化器即壅塞空化器,并对其处理污水的可行性进行了初步研究。

1 壅塞空化现象的相关研究

1.1 直管中气液两相混合流的壅塞空化现象

美国的J.H. Witte^[5]在研究直管中的气液两相混合流时,用恒温理论模型论证了在直管的某一截面处马赫数等于1时,出现了壅塞空化流动。流态从射流突然变化到泡状流,变化过程伴随着能量耗散和压力增加,该研究者把这种现象命名为混合激波。该实验装置见图1。

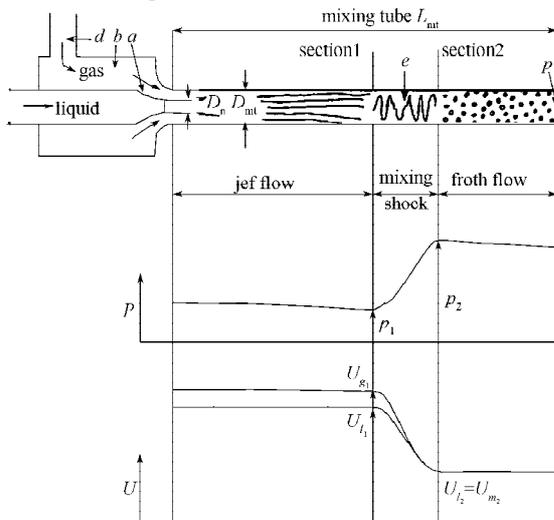


图1 实验装置简图

Fig. 1 Diagram of the experimental setup

恒温理论模型的基本假设:混合激波上游的气

相和下游的液相都是连续相;忽略蒸汽压力,气体和液体黏度的影响;不计壁面摩擦;液体不可压缩,气体为理想气体,不计气体的质量流量;在混合激波以后,为气液混合均相流,不考虑速度滑移。

基于以上假设,结合连续方程、动量方程、混合状态方程、能量方程得到混合激波上游的气液体积流量比 θ ,即

$$\theta = (1/a)\{-\varepsilon^2 + \varepsilon[1 + a(F-1)]\}, \quad (1)$$

式中: a 表示激波前的欧拉数; ε 表示混合激波前后的压力比; F 表示喉管的截面积与喷嘴的截面积比。

由绝热音速的表达式计算下游混合相中的马赫数 M_2 ,即

$$M_2 = U_{m_2} / c_{m_2} = (a\theta)^{1/2} / \varepsilon, \quad (2)$$

式中, c_{m_2} 表示下游气液两相流的当地音速。

由式(1)可以得知,当 $\theta=0$ 时,可得最大压力比 ε_{\max} ,即

$$\varepsilon_{\max} = 1 + a(F-1). \quad (3)$$

式(1)可看作是一条关于 ε 和 θ 的抛物线方程,将其顶点坐标代入到式(2)中得到混合激波下游的马赫数 $M_2=1$,因此,关于 ε 和 θ 的抛物线顶点的轨迹是一条马赫数 $M_2=1$ 的定直线。由此可以推断在直管下游的某一截面处一定会出现马赫数等于1,管内混合流的速度等于当地气液两相流的音速,流动出现壅塞现象。

如果简单地关闭喷射器的气阀,就能产生一种特殊形式的混合激波。在激波之前,喷射流中只有蒸汽。由于混合激波的存在,气泡产生,但又自然溃灭;因为激波后的压力高于液体中的饱和蒸汽压,因此,激波后仅剩下了液体相,称这种现象为空化激波。穿过这种激波的压力比最大值可用式(3)表示,也可以用式(4)表示。由于激波后只剩下液体相,此时激波上游的压力 p_1 为饱和蒸汽压 p_v ,因此压力比最大值也可以表示为

$$\varepsilon_{\max} = p_2 / p_v. \quad (4)$$

定义混合管中液体的液相折算速度 u^* 为

$$u^* = 4W_l / (\pi\rho_l D^2), \quad (5)$$

式中: W_l 表示液体的质量流量; D 表示喉管的直径; ρ_l 表示液体的密度。

将 $a = \rho_l u^{*2} / p_v$ 和式(5)代入式(3)中,可得最大压力比为

$$\varepsilon_{\max} = 1 + \frac{16W_l^2(F-1)}{\pi^2\rho_l D^4 p_v}. \quad (6)$$

当 $W_l=11.1$ kg/s, $F=3.106$, $D=0.03$ m, $\rho_l=1000$ kg/m³,

$p_v=2\ 650\ \text{N/m}^2$ 时,通过式(6)计算得到最大压力比 $\varepsilon_{\max}=197$ 。由此可见,当壅塞空化(空化激波)产生时,壅塞截面上下游(空化激波前后)的压力比较大,即产生壅塞空化现象时其管道内的静压恢复比较可观,远大于液体的饱和蒸汽压。

图2是 $a=23.5, \varepsilon=78, \theta=3.44, F=4$, 液体的质量流量为 $11.1\ \text{kg/s}$ 时的混合激波图。从图2可知,壅塞空化流动产生了大量的空泡。

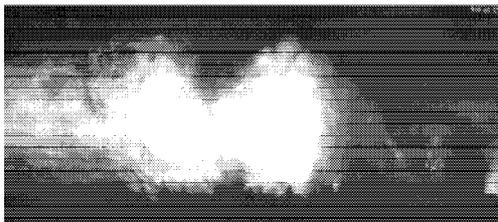


图2 混合激波图

Fig. 2 Mixing shocks

图3是 $a=118, \theta=0, \varepsilon=270, F=3.106$, 液体的质量流量为 $12.5\ \text{kg/s}$ 时的空化激波图。从图3可知,空泡在壅塞面几乎全部溃灭。

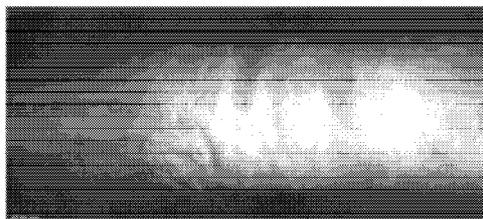


图3 空化激波图

Fig. 3 Cavitation shocks

从上面的分析可知,当直管中出现壅塞空化(空化激波)时,可实现壅塞截面上下游(空化激波前后)的较大压力比 $\varepsilon=p_2/p_v$ 。在远大于液体饱和蒸汽压的壅塞面下游(激波后)压力 p_2 的作用下,壅塞面上游(激波前)产生的空泡几乎全部得到溃灭,因此,壅塞空化流动能产生大量的气泡,且能使其有效地溃灭。

1.2 射流泵在极限工况时的壅塞空化现象

龙新平等^[6-7]对射流泵极限工况下的空化流动研究中发现,当射流泵处于空化发展阶段时,喉管内部会形成形状基本稳定的空化云;随着空化的进一步发展,空化云向喉管出口附近扩展;当射流泵极限工况发生时,该空化流成为混合均匀的泡状流,并在喉管出口或扩散管内溃灭,此时,射流泵的出口流量不会随出口压力的变化而变化。

依据射流泵的特点,基于定常、等温及水平流动假设和 Wood 声速公式,可以导出极限工况发生时射流泵喉管中段至末端一维均相泡状流的控制方程组,即

$$\begin{cases} -\frac{dp}{dz} = 2C_f \frac{W^2}{A^2 d \rho_l (1-\alpha)} \sqrt{1-M^2}, \\ \left(\frac{\alpha}{c_v^2} v_v + \frac{1-\alpha}{c_l^2} v_l \right) \left(\frac{1-\alpha}{v_l} + \frac{\alpha}{v_v} \right)^{-1} \frac{W^2}{A^2} = M^2, \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\frac{dp}{dz}$ 表示喉管中段至末端的较小距离内的压力梯度;

C_f 表示两相流摩擦系数;

A 表示管道截面积;

W 表示质量流量;

d 表示管道直径;

ρ_l 表示液相密度;

α 表示断面含汽率;

M 表示马赫数;

c_v, c_l 分别表示气、液相当地音速;

v_v, v_l 分别表示气、液相比容。

依据该控制方程及射流泵壁面沿程压力测试结果,计算喉管中段至末端气液两相流动的马赫数。从喉管的中段至末端气液两相流动的马赫数逐渐增加,在压力最低点附近它达到 0.94 , 该值比较接近 1 , 因此,可以推测在喉管中段至末端的压力最低点附近必然存在马赫数 $M=1$ 的截面,气液两相流的混合速度达到当地气液两相流声速,流动出现壅塞空化现象,如图4所示。

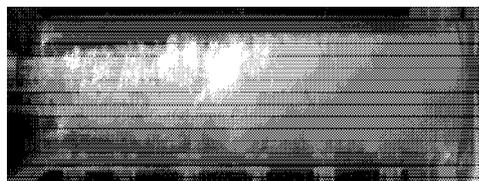
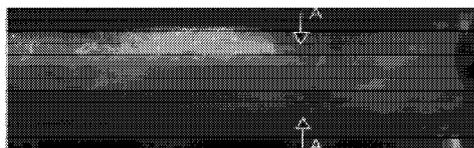


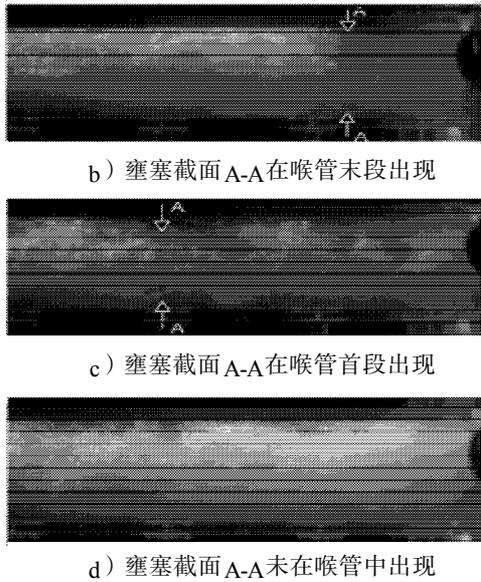
图4 射流泵极限工况下的壅塞空化现象

Fig. 4 Choking cavitation in jet pump under the operating limits

在射流泵极限工况条件下,随着出口压力的增加,在喉管中会出现明显的界面,泡状流通过这个界面的气泡密度会减小,说明大量的气泡在界面处溃灭,这种现象类似于上节提到的空化激波。进一步观察发现,界面会随着工作条件的变化在喉管中向前或是向后移动,如图5所示。图5 d) 喉管中未观察到界面,因为它已经移动到扩散管中。由上面的分析可知,在实验中观察到的这个界面应该就是马赫数 $M=1$ 的截面。



a) 壅塞截面 A-A 在喉管中段出现



b) 壅塞截面 A-A 在喉管末段出现

c) 壅塞截面 A-A 在喉管首段出现

d) 壅塞截面 A-A 未在喉管中出现

图5 界面在喉管中的移动

Fig. 5 The movement of interface in the throat pipe

射流泵处于极限工况时, 在喉管内可形成壅塞空化流动, 当地马赫数 M 等于 1 的截面位置会随工作条件的变化前后移动。因此, 通过改变相关运行参数, 即可控制当地马赫数 M 等于 1 的截面位置。

1.3 在倒角圆柱形壅塞管中的壅塞空化现象

日本的青山邑里等人^[8-11]用流场可视化实验研究了经过倒角的圆柱形壅塞管在定常和非定常流动下的空化特性。保持下游压力恒定, 变化上游压力; 保持上游压力恒定, 变化下游压力, 使壅塞管在定常和非定常流动下产生空化。用高速摄像机拍摄了 3 个参数在不同取值情况下的空化气泡实验图, 即 4 种不同壅塞管直径 d , 2 种壅塞管长度 l , 2 种不同倒角长度 s 。该实验结果显示, 在长壅塞管中观察到片状空泡、泡状空泡、云状空泡 3 种类型的空化区域, 即使在空化数相同的情况下, 每种空化类型在长壅塞管中所占区域都会随 d 和 s 的变化而变化。图 6 是在 $k=0.194, s=0, d=3 \text{ mm}, l=20 \text{ mm}$ 时圆柱形壅塞管在定常流中的空化现象, 其中 k 为空化数。

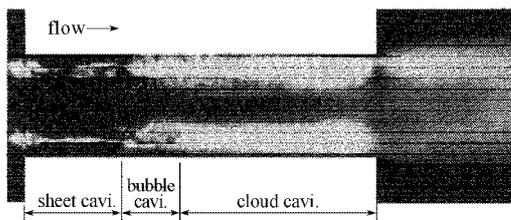


图6 圆柱形壅塞管在定常流中的空化现象

Fig. 6 Cavitation phenomena for steady flow in the cylindrical choke pipe

1.4 阶梯圆管中的稳态绝热闪蒸流的壅塞空化现象

比利时的 Attou 等人^[12-13]在研究阶梯圆管中的

稳态绝热闪蒸流时, 发现要出现两处壅塞现象应同时满足 2 个基本条件, 即下游压力条件和熵增加条件。下游压力条件是指背压要小于或等于靠近下游的临界点的临界压力; 熵增加条件是指下游的水头损失系数小于或等于最大水头损失系数。在合适的几何结构和运行条件下, 阶梯圆管会出现 2 个临界面 (见图 7 中的截面 1 和截面 2), 其最大临界流量率只受前一个临界面的影响, 不受后一个临界面的影响。

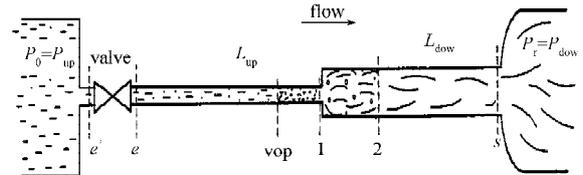


图7 阶梯圆管在稳态绝热闪蒸流时的多次壅塞现象

Fig. 7 Multiple choking phenomena for steady-state adiabatic flashing flow in a pipe involving an abrupt enlargement

根据阶梯圆管在稳态绝热闪蒸流时的多次壅塞现象, 可以通过设计特定的壅塞空化器结构, 在适当的运行条件下, 也有可能出现多壅塞面空化现象。这样产生的空泡会经过多次有效的溃灭, 其空化效果可能会得到提高。对于其在空化处理污水的应用效果能否在单壅塞空化的基础上有较大的提高, 还需要深入研究。

2 壅塞空化器设计及其噪声谱特性

作者^[14]结合气液两相临界流和水力空化原理, 充分利用壅塞现象产生的特殊流场特性, 设计了新型的空化器, 即壅塞空化器。

壅塞空化器的工作原理如图 8 所示。水流从环状缝隙射入壅塞管内, 在壅塞管的上游形成低压区并开始出现大量的空泡, 随着携带大量空泡的流体 (气液两相流) 在壅塞管内流动, 管内气相含量快速增加, 当地气液两相流音速急剧下降。在壅塞管下游的某断面处当地马赫数 $Ma=1$ (称为壅塞截面) 时, 出现壅塞现象。根据气液两相临界流理论, 壅塞截面下游的流场压力变化 (低于临界压力) 不会影响上游流场的压力。适当控制壅塞空化器的尺寸, 一旦在壅塞空化器内建立起了稳定的壅塞空化流动, 壅塞截面就相当于一扇天然的闸门, 把管内流场分成了两个区域。其上游为空泡的产生区和长大区 (低压区), 下游为空泡的溃灭区 (高压区)。可建立起高低压区的较高压力上升梯度。在喉管中保持壅塞流动的条件下, 适当增加壅塞截面下游的压力, 使气泡在通过壅塞截面时大量溃灭。这样壅塞空化器

就同时满足了空化效应的空泡产生和溃灭需要不同流场压力的要求,使空化过程中所产生的空泡几乎全部能得到有效溃灭。

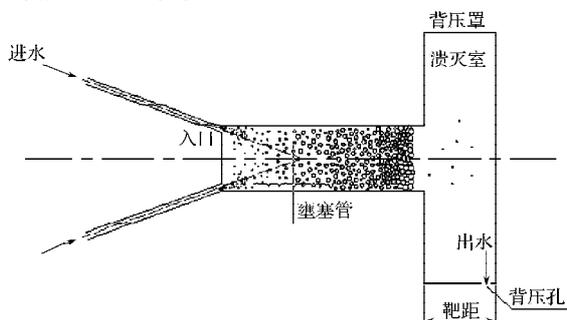


图8 壅塞空化器工作原理简图

Fig. 8 Diagram of choking cavitator principle

参考文献[14]对普通喷嘴、振荡腔喷嘴和壅塞空化器的空化噪声功率谱的实验结果分析表明,普通喷嘴的空化噪声功率密度随频率的增加下降得较快,在高频段(50~120 kHz)没有能量的积蓄;振荡腔喷嘴在频率为50~120 kHz段出现一平台,有能量的积蓄,但其功率密度幅值较小;壅塞空化器在频率为50~120 kHz段出现了高能量平台,在整个平台上都有很好的能量积蓄。壅塞空化器的这种宽频高能量的平台特性,特别有利于空化效应用于水处理领域。

3 壅塞空化器处理污水的可行性研究

3.1 壅塞空化器的空化噪声测试与分析

实验装置见参考文献[14],对3种空化发生装置在10~40 mm的靶距分别进行空化噪声测试,并对实验结果采用空化噪声能量比值对数法进行分析。

E_b 为背景噪声能量, E 为空化噪声能量,为使处理后的数据可靠,本文在数据处理过程中选用打开自来水时(此时压力为0.2 MPa)采集的噪声做为背景。由于打开自来水时,已产生了少量的空化,故本文取 $E/E_b=2$ 作为有明显空化现象的表征。由于计算后的数值较大,故取 $\log_2(E/E_b)$ 对各组数据进行分析。当对数值大于0时,表明发生了明显空化。

能量比值对数计算公式为

$$\lambda = \log_2 \frac{E}{E_b} = \log_2 \frac{\sum_{i=1}^n p_i^{20} \times f_i}{\sum_{i=1}^n (p'_i)^{20} \times f_i}, \quad (8)$$

式中, p_i, p'_i 分别为对应频率 f_i 下的开泵采集空化噪声与背景噪声的瞬时声压。

壅塞空化器、振荡腔喷嘴及普通喷嘴的空化能量比值对数对比见图9。

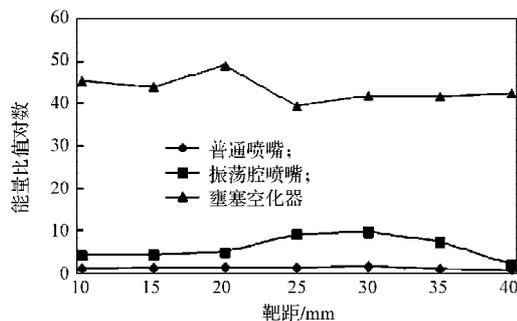


图9 3种空化器空化能量比值对数对比

Fig. 9 Comparison of energy ratio logarithms of the three kinds of cavitator

由图9可知,壅塞空化器在靶距为20 mm时空化噪声能量比值对数最大值为49,振荡腔喷嘴在靶距为30 mm时最大能量比数值为9.8,而普通喷嘴在靶距为30 mm时最大能量比数值为1.7。壅塞空化器的空化噪声能量比值对数最大值是振荡腔喷嘴的5倍,约是普通喷嘴的29倍。空化器的能量比值对数分析结果和空化器噪声谱特性的分析结果相稳合。这也说明壅塞空化器的空化能力与振荡腔喷嘴相比有较大飞跃。

由于壅塞空化器独特的设计理念——空化机理与壅塞原理的有机结合,使其可以在更大面积产生空泡,并使空泡几乎全部得到有效溃灭,而这一结合是普通喷嘴和振荡腔喷嘴无法比拟的。

3.2 壅塞空化器处理苯酚溶液实验

3.2.1 实验装置与实验方法

实验装置见图10,由涡旋泵,空化器,水槽和冷却系统组成,水从水槽经涡旋泵后从空化器喷出到水槽,形成闭合回路。

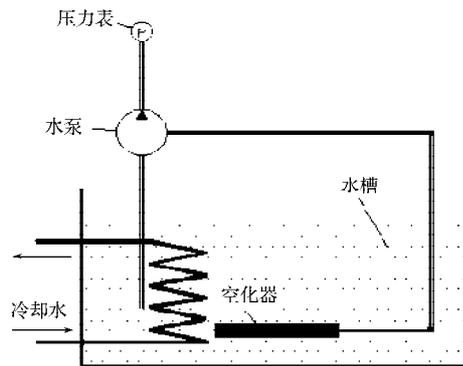


图10 实验系统示意图

Fig. 10 Diagram of experiment setup

取50 mL的苯酚储备液(质量浓度为20 g/L),加入10 L反应容器中;定容后,待处理溶液的质量浓度为100 mg/L, pH值为6.5,泵压为0.95 MPa,环境温度23 °C,处理温度38 °C;分别用壅塞空化器、振荡腔喷嘴、普通喷嘴对其进行20, 30, 40, 50和60 min

的循环处理。

根据国家标准 GB7490—87, 实验采用 4-氨基安替比林分光光度法测量苯酚溶液浓度, 采用 723N 型可见分光光度计 (上海佑科仪器仪表有限公司) 检测溶液吸光度。

3.2.2 实验结果与分析

溶液中苯酚去除率定义为

$$\text{苯酚去除率}(\%) = \frac{C_0 - C_t}{C_0} \times 100,$$

式中: C_0 是处理前苯酚溶液的质量浓度, mg/L;

C_t 是处理后苯酚溶液的质量浓度, mg/L。

壅塞空化器、振荡腔喷嘴及普通喷嘴三者对苯酚去除率的对比见图 11。

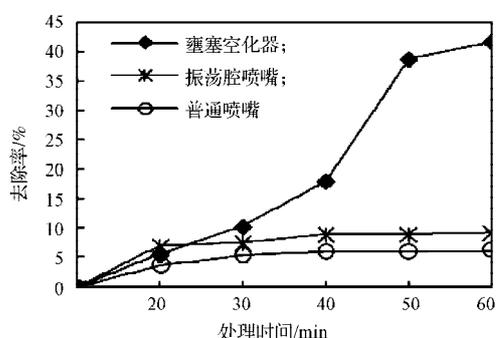


图 11 3 种不同空化器的苯酚去除率

Fig. 11 Comparison of phenol elimination rate with the three kinds of cavitator

由图 11 可知, 处理 60 min 后, 壅塞空化器对苯酚去除率达 41.59%, 振荡腔喷嘴为 9.21%, 普通喷嘴为 6.27%, 壅塞空化器对苯酚去除率分别约是振荡腔喷嘴的 4.5 倍和普通喷嘴的 6.6 倍。这是因为普通喷嘴和振荡腔喷嘴产生的空化射流中空化区域的体积占水体的比例较低, 还有射流冲击靶盘时的水垫作用, 它降低了滞止点以外区域的压力梯度, 使部分空泡不能被有效溃灭, 因而产生的空化强度较低, 生成的自由基数量少, 反应区域的自由基浓度低, 对苯酚的去除率也就低。壅塞空化器由于其独特设计, 壅塞管低压区可产生大范围的空泡, 壅塞截面上游为空泡的生长、发育提供了较为稳定的环境, 当含大量空泡的气液两相流穿过壅塞截面后到达高压区 (溃灭区), 突然溃灭 (几乎是完全有效溃灭), 在局部产生更多的自由基, 反应区域的自由基浓度较高, 提高了苯酚的降解率。

4 结论

壅塞空化现象是一种特殊的气液两相临界流动现象。当直管中出现壅塞空化时, 可实现壅塞截面

上下游的较大压力比, 即管内的静压在壅塞截面处有大梯度的回升。在远大于液体饱和蒸汽压的壅塞面下游压力的作用下, 壅塞面上游产生的空泡几乎全部得到溃灭, 因此, 壅塞空化流动能产生大量的空泡并使其有效地溃灭。在特定的空化发生器结构及相应的运行条件下, 还可能产生多截面壅塞空化现象。

壅塞空化器能形成较大的空化区域。在形成了稳定的壅塞空化流动的条件下, 通过适当增大下游的压力, 即可实现既不影响壅塞面上游的压力和大量空泡的产生, 又能使下游的空泡几乎全部溃灭。因此, 壅塞空化器能很好地解决增加空化区域占水体的体积比和使空泡有效溃灭的问题, 因而能更有效地产生空化。

通过对壅塞空化器的空化噪声采集分析和模拟污水 (苯酚溶液) 处理实验的分析结果表明, 壅塞空化器的空化噪声能量比值对数是振荡腔喷嘴的 5 倍, 约是普通喷嘴的 29 倍; 在处理苯酚溶液时, 壅塞空化器对苯酚去除率达 41.59%, 分别约是振荡腔喷嘴的 4.5 倍和普通喷嘴的 6.6 倍。因此, 壅塞空化器在污水处理中的应用具有可行性。

参考文献:

- [1] Suslick K S. Sonochemistry[J]. Science, 1990, 247(4949): 1439-1445.
- [2] Flint E B, Suslick K S. The Temperature of Cavitation[J]. Science, 1991, 253(5026): 1397-1399.
- [3] Jyoti K K, Pandit A B. Water Disinfection by Acoustic and Hydrodynamic Cavitation[J]. Biochemical Engineering Journal, 2001, 7(3): 201-212.
- [4] Gogate Parag R. Hydrodynamic Cavitation for Food and Water Processing[J]. Food and Bioprocess Technology, 2011, 4(6): 996-1011.
- [5] Witte J H. Mixing Shocks in Two-Phase Flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1969, 36(4): 639-655.
- [6] 龙新平, 姚昊, 赵建福. 射流泵极限工况下空化流动[J]. 机械工程学报, 2009, 45(12): 59-64.
Long Xinping, Yao Hao, Zhao Jianfu. Cavitating Flow in Jet Pump under the Operating Limits[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(12): 59-64.
- [7] Long X P, Yao H, Zhao J. Investigation on Mechanism of Critical Cavitating Flow in Liquid Jet Pumps under Operating Limits[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, 52(9/10): 2415-2420.
- [8] Aoyama Yuri, Watanabe Naoto, Masao Yamamoto, et al. Behavior of Cavitation Bubbles in Cylindrical Choke by

- Using Flow Visualization: 3rd report, Case of Pressure Change in Downstream of Choke[J]. Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1999, 65(640): 4001-4008.
- [9] Aoyama Yuri, Matsuoka Yoshihiro, Noritake Hiroaki, et al. Flow Visualization of Cavitation in a Cylindrical Choke [J]. Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1996, 62(601): 3243-3249.
- [10] Yamamoto Masao, Matsuoka Yoshihiro, Aoyama Yuri, et al. An Experimental Investigation of the Flow in a Curved Diffuser: 2nd Report, Effects of the Existence of a Guide Vane and the Variation in Logarithmic Spiral Angle on the Diffuser Performance[J]. Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1996, 62(598): 2296-2302.
- [11] Aoyama Yuri, Watanabe Naoto, Yamamoto Masao, et al. Cavitation Performance of Cylindrical Choke for Unsteady Flow: 2nd Report, Comparison of Difference in Inlet Shape of Choke[J]. Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1999, 65(640): 3993-4000.
- [12] Attou A, Seynhaeve J M. Steady-State Critical Two-Phase Flashing Flow with Possible Multiple Choking Phenomenon [J]. Journal of Loss Prevention in the Process Industries, 1999, 12(5): 335-359.
- [13] Attou A, Bolle L, Seynhaeve J M. Experimental Study of the Critical Flashing Flow through a Relief Line: Evidence of the Eouble-Choked Flow Phenomenon[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2000, 26 (6): 921-947.
- [14] 张凤华, 刘海峰, 徐俊超, 等. 壅塞空化与射流空化噪声谱特性的实验研究[J]. 湖南工业大学学报, 2011, 25 (6): 47-50.
- Zhang Fenghua, Liu Haifeng, Xu Junchao, et al. Experimental Investigation on the Noise Spectrum Features of Choking-Cavitation and Jet-Cavitation[J]. Journal of Hunan University of Technology, 2011, 25(6): 47-50.

(责任编辑: 邓彬)

(上接第3页)

$p(x)$ 满足方程(32)~(34), (44)~(46)或(47)~(49)。

参考文献:

- [1] 陆全康, 赵蕙芬. 数学物理方法[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 286-290.
- Lu Quankang, Zhao Huifen. Mathematical Methods in Physics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2003: 286-290.
- [2] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 172-174.
- Liang Kunmiao. Mathematical Methods in Physics[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2010: 172-174.
- [3] 金福临, 李训经. 常微分方程[M]. 2版. 上海: 上海科学技术出版社, 1962: 162-163.
- Jin Fulin, Li Xunjing. Ordinary Differential Equation[M]. 2nd ed. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1962: 162-163.

(责任编辑: 邓光辉)