

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.04.004

棘齿势中玻色-爱因斯坦凝聚体原子的 规则与混沌分布

张冬霞¹, 曹飞¹, 李飞²

(1. 江西渝州科技职业学院 新能源工程学院, 江西 新余 338029; 2. 湖南科技大学 物理学院, 湖南 湘潭 411201)

摘要: 棘齿势中的玻色-爱因斯坦凝聚系统原子呈现规则与混沌分布, 采用等效势法和直接微扰法可得到系统的混沌解。进一步研究 BEC 原子间非线性相互作用对系统原子分布的影响, 得到较强的非线性相互作用可以使系统原子由规则的分布转变为混沌分布的结论。通过数值模拟可得: 调节棘齿势强度的大小可以控制 BEC 原子的规则与混沌分布。

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚; Gross-Pitaevskii 方程; 棘齿势; 混沌

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2012)04-0011-07

Regular and Chaotic Distribution of Bose-Einstein Condensate Atoms with a Ratchet Potential

Zhang Dongxia¹, Cao Fei¹, Li Fei²

(1. College of New Energy and Engineering, Jiangxi Yuzhou Science and Technology Vocational College, Xinyu Jiangxi 338029, China;

2. School of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China)

Abstract: Bose-Einstein condensate atoms with a ratchet potential appear regular and chaotic distribution. By using equivalent potential and the direct perturbation method obtains the chaotic solution of the condensed system. Further investigates the influence of the nonlinear interaction between BEC atoms on the distribution of the condensed system, and finds the conclusion that the stronger nonlinear interaction can cause the system atoms from regular distribution transforming into chaos distribution. Numerical simulation also reveals that the regular and chaotic distribution of BEC atoms can be controlled by adjusting the ratchet potential strength.

Keywords: Bose-Einstein condensates; Gross-Pitaevskii equation; ratchet potential; chaos

0 引言

1995 年科学界首次在实验上实现了玻色-爱因斯坦凝聚^[1-2](Bose-Einstein condensation, BEC), 这使得 BEC 的研究有着十分重要的意义和潜在的应用价值。

近年来这项研究已引起理论和实验研究工作者的广泛关注。BEC 是一种具有宏观量子相干、宏观量子隧穿及量子超流性质的量子流体^[3]。因此, 对 BEC 现象的深入研究, 不仅对基础研究有重要意义, 而且在原子激光、原子钟、原子芯片技术、精密测量、量子计算

收稿日期: 2012-06-08

基金项目: 湖南省教育厅科研基金资助项目(08C344)

作者简介: 张冬霞(1984-), 女, 河南南阳人, 江西渝州科技职业学院讲师, 硕士, 主要研究方向为材料物理,

E-mail: zhangdongwei12345@yahoo.cn

机和纳米技术等领域都有很好的应用前景。

相向传播的两束或多束相干激光束可以在空间产生强弱相间的周期场,这类周期场通常被称为光晶格或光格(optical lattice)。自从1996年, Damhan 等人成功地把玻色-爱因斯坦凝聚体放到了光格中^[4],这种由来回反射的激光束形成的具有空间周期性分布的光晶格,成为研究 BEC 宏观量子性质、相性质、物质波干涉以及从 Mott 绝缘态到超流态相变等问题的最有效工具之一^[2,5-8]。更重要的是,在这样的系统中还有许多新的现象也被观察或预测到,如 Bloch 带之间的非线性 Landau-Zener 隧穿^[9-10]和很强的阻尼输运特性^[11],棘齿效应^[12-13]等。其中由于棘齿效应在生物输运、分子马达、纳米技术等方面具有潜在的应用价值而得到人们的广泛关注。近年来,有关棘齿效应的研究有很多,研究的领域也很广,比较典型的有在不对称周期势中布朗粒子的运动^[13-14]、约瑟夫森结数组中棘齿势对磁通的作用^[15-16]、冷原子中不对称光学晶格的棘齿效应^[10,17-18]、棘齿势中囚禁离子的规则与混沌运动^[19]、周期驱动 BEC 系统的棘齿效应^[20]和其它量子领域的“棘齿效应”^[21]等。

本文主要探讨在棘齿势作用下 BEC 原子的规则与混沌分布。通过等效势法和波函数时空变量分离的方法得到一维的非线性薛定谔方程,使用直接微扰法对这个方程进行处理,得到 Melnikov 混沌判据,说明系统中存在着原子的混沌分布。再利用数学软件 Mathematica 进行数值模拟,对上述理论分析加以验证。

1 棘齿势下的玻色-爱因斯坦凝聚

按照平均场理论,温度接近绝对零度时,一维 BEC 动力学演化可以被一维量子力学的 Gross-Pitaevskii (GP) 方程(1)很好地描述^[22]。

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g|\psi|^2 \psi + V_{\text{ext}}(x)\psi, \quad (1)$$

式中: ψ 为宏观量子波函数;

\hbar 为普朗克常量;

$g = 2\hbar\omega_1 a_s$ 为非线性相互作用参数, ω_1 表明横向频率, a_s 为原子的 s 波散射波长,可以为正也可以为负, $a_s > 0$ 表示两体作用互相排斥, $a_s < 0$ 表示两体作用互相吸引;

m 为原子质量;

V_{ext} 为一维光晶格势。

考虑玻色-爱因斯坦凝聚原子被囚禁在一个非对称周期势-棘齿势中,应满足式(2)所示关系,

$$V_{\text{ext}}(x) = V_1 \sin(2Kx) + V_2 \sin(Kx), \quad (2)$$

式中: K 表示形成光晶格势的激光的波矢; V_1, V_2 表示势的强度。

为了便于分析,采用无量纲化

$$\begin{cases} \tilde{t} = \frac{\hbar}{m} [K]^2 t, \quad \tilde{x} = [K]x, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{n}}, \\ \tilde{V}_1 = \frac{m}{[K]^2 \hbar^2} V_1, \quad \tilde{K} = \frac{K}{[K]}, \quad \tilde{g} = \frac{mn}{[K]^2 \hbar^2} g, \end{cases} \quad (3)$$

式中: n 是 BEC 的原子密度;

$[K]$ 是 K 的单位。

将式(2)代入式(1),从而可以得到无量纲的 GP 方程

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g|\psi|^2 \psi + [V_1 \sin(2Kx) + V_2 \sin(Kx)]\psi. \quad (4)$$

文献[23]表明对散射长度可以用 Feshbach 共振技术来调节,也即意味着非线性相互作用参数 g 是可以调节的。因此考虑非线性相互作用参数 g 的表达式为

$$g(x) = g_0 + g_1 \sin^2(\kappa x), \quad (5)$$

式中: g_0 是未修正的非线性参数;

g_1 是修正之后的振幅;

κ 为波矢。

令 $\phi = \sqrt{g(x)}\psi$ 且 $g(x) \neq 0$ 可得

$$i\phi_t = -\frac{1}{2} \phi_{xx} + |\phi|^2 \phi + [V_1 \sin(2Kx) + V_2 \sin(Kx)]\phi + \hat{V}_{\text{eff}}(x)\phi, \quad (6)$$

$$\hat{V}_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{2g} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial x^2} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (7)$$

考虑 $g_0 \gg g_1$ 时,则根据文献[24]可得

$$\hat{V}_{\text{eff}}(x) = -\frac{3\kappa^2 g_1^2}{16g_0^2} + \frac{\kappa^2 g_1 \cos(2\kappa x)}{2g_0} + \frac{3\kappa^2 g_1^2 \cos(4\kappa x)}{16g_0^2} + \frac{\kappa g_1 \sin(2\kappa x)}{2g_0} \frac{\partial}{\partial x},$$

因为 $g_0 \gg g_1$, 因此假设 $\varepsilon = \kappa g_1 / g_0 \ll 1$, 则

$$\hat{V}_{\text{eff}}(x) = -\frac{3\varepsilon^2}{16} + \frac{\kappa \varepsilon \cos(2\kappa x)}{2} + \frac{3\varepsilon^2 \cos(4\kappa x)}{16} + \frac{\kappa \varepsilon \sin(2\kappa x)}{2} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (8)$$

为了对玻色-爱因斯坦凝聚系统作出简单明了的描述,设式(6)的解为

$$\phi(x, t) = R(x) \exp[i(\theta(x) - \mu t)], \quad (9)$$

式中: $R(x)$ 表示振幅;

$\theta(x)$ 表示相位角;

μ 表示化学势。

将式(9)代入式(6), 可以得到由它相应的实部和虚部而分成的2个耦合方程:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + 2\tilde{\mu}R(x) - 2R^3(x) - R(x)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 - \\ & 2[V_1 \sin(2Kx) + V_2 \sin(Kx)]R(x) - \\ & \left[\kappa\varepsilon \cos(2\kappa x) + \frac{3\varepsilon^2}{8} \cos(4\kappa x)\right]R(x) - \\ & \varepsilon \sin(2\kappa x) \frac{dR(x)}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$2 \frac{dR(x)}{dx} \frac{d\theta}{dx} + R(x) \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \varepsilon \sin(2\kappa x) R(x) \frac{d\theta}{dx}, \quad (11)$$

式中 $\tilde{\mu} = \mu + \frac{3}{16}\varepsilon^2$ 。

式(11)可以转变为

$$\frac{d}{dx} \left(R^2 \frac{d\theta}{dx} \right) = \varepsilon \sin(2\kappa x) R^2 \frac{d\theta}{dx}. \quad (12)$$

原子流密度 $J(x)$ 可以表示为

$$J(x) = R^2 \frac{d\theta}{dx} = e^{\frac{\varepsilon \cos(2\kappa x)}{2\kappa}}. \quad (13)$$

式(13)表明系统中存在超流现象, 且原子流密度不是一个常数, 这表明原子流不是一个稳定的流。通过对式(13)进行数值模拟来研究非线性系数 ε 对玻色-爱因斯坦凝聚体系统的影响, 其结果如图1所示, 图中 $\kappa=5$ 。由图可看出, 随着 ε 的增大, 流的强度也在增大, 这说明 ε 对原子流密度的影响较大。

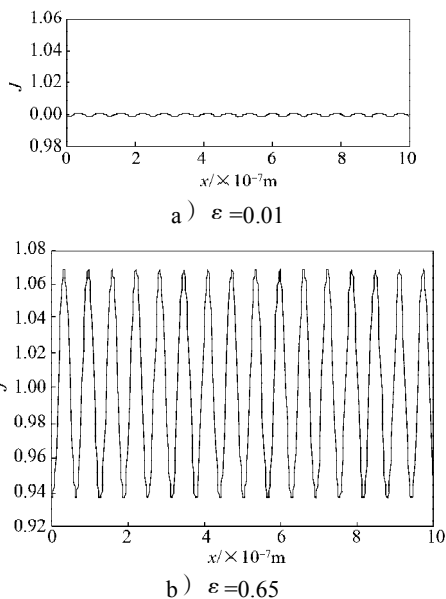
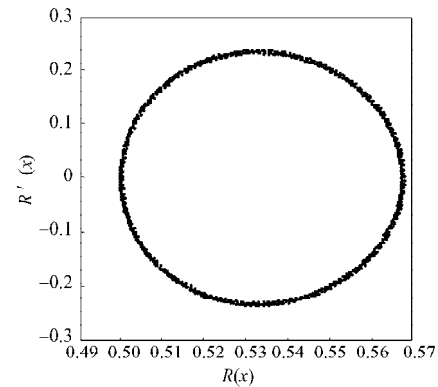


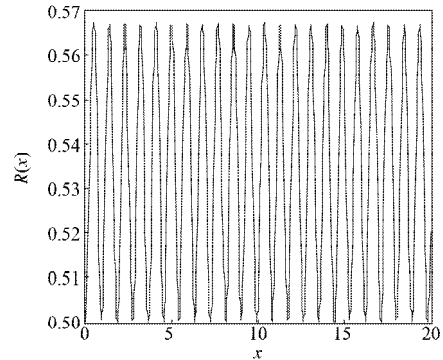
图1 非线性系数对原子流密度空间演化曲线的影响
Fig. 1 The impact of nonlinear coefficient on the spatial evolution of the current

为了更好地揭示原子流密度对系统的影响, 利用数学软件 Mathematica 对式(10)进行数值模拟, 模拟出相图 $(\dot{R}(x), R(x))$ 和相应的 $R(x)$ 空间演化图, 其结果如图2~3所示。设置参数为: $\tilde{\mu}=6.5, \kappa=5, K=2.5, V_1=0.005, V_2=0.001, R(0)=0.5, \dot{R}(0)=0$ 。

当 $\varepsilon=0.01$ 时, 所得图像如图2所示, 由相图和对应的空间演化曲线可以看出, 凝聚体原子的分布是有规则的; 当 $\varepsilon=0.65$ 时, 由图3可以看出, 凝聚体原子的分布是无规则的。由此可以分析出原子流的大小对凝聚体原子的分布有很大影响, 当原子流较小时, 对系统几乎没有影响; 当原子流较强时, 系统的原子分布由规则的分布转变为不规则的混沌分布。



a) $(R(x), \dot{R}(x))$ 相图

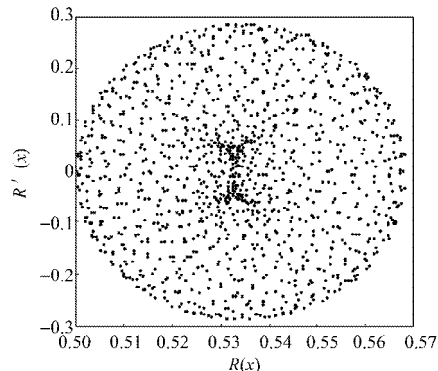


b) $R(x)$ 的空间演化曲线

图2 $\varepsilon=0.01$ 时凝聚体原子的分布情况

Fig. 2 The distribution of BEC with $\varepsilon=0.01$

图2表明此时系统原子是有规则分布。



a) $(R(x), \dot{R}(x))$ 相图

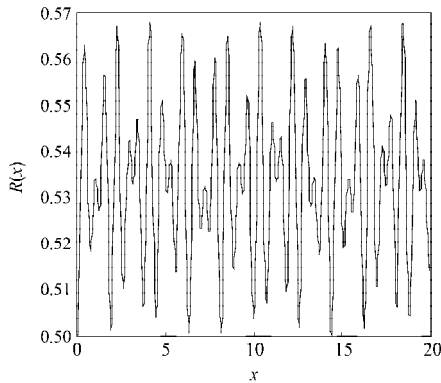
b) $R(x)$ 的空间演化曲线图3 $\varepsilon=0.65$ 时凝聚体原子的分布情况Fig. 3 The distribution of BEC with $\varepsilon=0.65$

图3表明此时系统原子是无规则的分布,这里 $\varepsilon=0.65$,其余系统参数和初始条件和图2一致。

2 微扰分析

将式(13)代入方程(10),可以得到 $R(x)$ 所满足的薛定谔方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + 2\tilde{\mu}R(x) - 2R^3(x) - \frac{J^2}{R^3(x)} - \\ 2[V_1 \sin(2Kx) + V_2 \sin(Kx)]R(x) - \\ \left[\kappa \varepsilon \cos(2\kappa x) + \frac{3}{8} \varepsilon^2 \cos(4\kappa x) \right] R(x) - \\ \varepsilon \sin(2\kappa x) \frac{dR(x)}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

对于这样一个非线性微分方程,一般很难求得其精确解。这里将棘齿势作为一个外加微扰来考虑,采用直接微扰法来求方程的近似解。将振幅做级数展开,并且只考虑一级近似

$$R(x) = R_0(x) + R_1(x), |R_0(x)| \gg |R_1(x)|. \quad (15)$$

将式(15)代入到式(14),可以得到2个方程,零级方程为

$$\frac{d^2 R_0}{dx^2} + 2\tilde{\mu}R_0 - 2R_0^3 - \frac{J^2}{R_0^3} = 0, \quad (16)$$

一级方程为

$$\frac{d^2 R_1}{dx^2} + 2\tilde{\mu}R_1 - 6R_0^2 R_1 - \frac{3J^2}{R_0^4} R_1 = \gamma(x), \quad (17)$$

式中, $\gamma(x) = \sin(2\kappa x) \frac{dR_0}{dx} + 2[V_1 \sin(2Kx) + V_2 \sin(Kx)]R_0 + \kappa \cos(2\kappa x)R_0$ 。

对于式(16)和(17),如果 $J(x)$ 为一个变量,则方程很难求解,因此考虑当 ε 足够小时, $J(x)$ 可以约等于1,则当 $\tilde{\mu} > 0$ 时,式(16)是一个非常著名的

Duffing方程,它具有一个同宿解^[25]

$$R_0(x) = \sqrt{b - (b-c)\sec^2 h^2 \xi}, \quad (18)$$

式中: $\xi = \sqrt{b-c}x - C$,

$$C = \sqrt{b-c}x_0 - A \operatorname{arsec} h \left[(b - R_0^2(x_0)) / (b-c) \right]^{1/2}.$$

这里 C 是一个积分常数, b 和 c 满足式(19),

$$\begin{cases} 2b + c = \tilde{\mu}, b^2 + 2bc = D, b^2 c = 1, \\ D = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{dR_0(x)}{dx} \right|_{x_0} \right)^2 + \\ \frac{1}{2R_0^2(x_0)} - \frac{1}{4} R_0^4(x_0) + \frac{1}{2} \tilde{\mu} R_0^2(x_0). \end{cases} \quad (19)$$

运用零级解(18)和常数变易法,可以构建一级微扰方程(17)解析解的一般形式^[26],即

$$R_1(x) = g \int_A^x f \gamma(x) dx - f \int_B^x g \gamma(x) dx, \quad (20)$$

式中: A 和 B 是两个积分常数;

f 和 g 是方程(17)在 $\gamma(x)=0$ 时2个线性无关的解,其形式为

$$f = \frac{dR_0(x)}{dx} = (b-c)^{\frac{3}{2}} \frac{\sec^2 h^2 \zeta \tanh \zeta}{\sqrt{b - (b-c)\sec^2 h^2 \zeta}}, \quad (21)$$

$$g = f \int f^{-2} dx =$$

$$\sec^2 h^2 \zeta \tanh \zeta \left[(12b + 48c)\zeta + 8(b+c)\sinh 2\zeta + b\sinh 4\zeta - 32c \coth \zeta \right] / 32(b-c)^2 \sqrt{b - (b-c)\sec^2 h^2 \zeta}. \quad (22)$$

显然, x 趋近于无穷大时, f 趋于零,但 g 的极大值随 x 的变化而趋向于无穷大。因此在通常情况下,一级近似解(20)是无界的。但是,对于这个发散解可以通过一个充分必要条件^[27]

$$I_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_A^x f \gamma(x) dx = 0 \quad (23)$$

来加以控制。利用罗必达法则可以来证明当上述条件满足时,一级近似解(20)将变得有界。研究证明当 $I_+ - I_- = 0$ 时能消去常数 A 。这里出现了一个有趣的结果,即控制条件中包含了判断系统混沌存在与否的Melnikov准则^[28]

$$M(x_0) = I_+ - I_- = \int_{-\infty}^{\infty} f \gamma(x) dx = 0. \quad (24)$$

根据Melnikov混沌判据的原则,当Melnikov函数(24)等于零时,就意味着系统在参数空间中存在着混沌和混沌区域。因此,人们常称服从Melnikov混沌判据(24)的解(20)为“混沌解”^[29-31]。

3 数值模拟

在进行数值计算的过程中, 发现 BEC 系统的相轨道对棘齿势的强度 V_1 和 V_2 非常敏感, 因此可以数值模拟外势强度对系统原子分布的影响。从式 (10) 出发, 利用 Mathematica 数学软件对此式进行数值模拟。首先考察 V_1 对系统原子分布的影响, 选取系统参数 $\tilde{\mu}=6.5, \kappa=5, K=2.5, V_2=0.001$ 和初始条件, 取 $V_1=0.005$ 代入式 (10) 进行数值模拟, 其结果如图 4 所示。图 4a 显示系统原子分布处于规则的单周期分布。

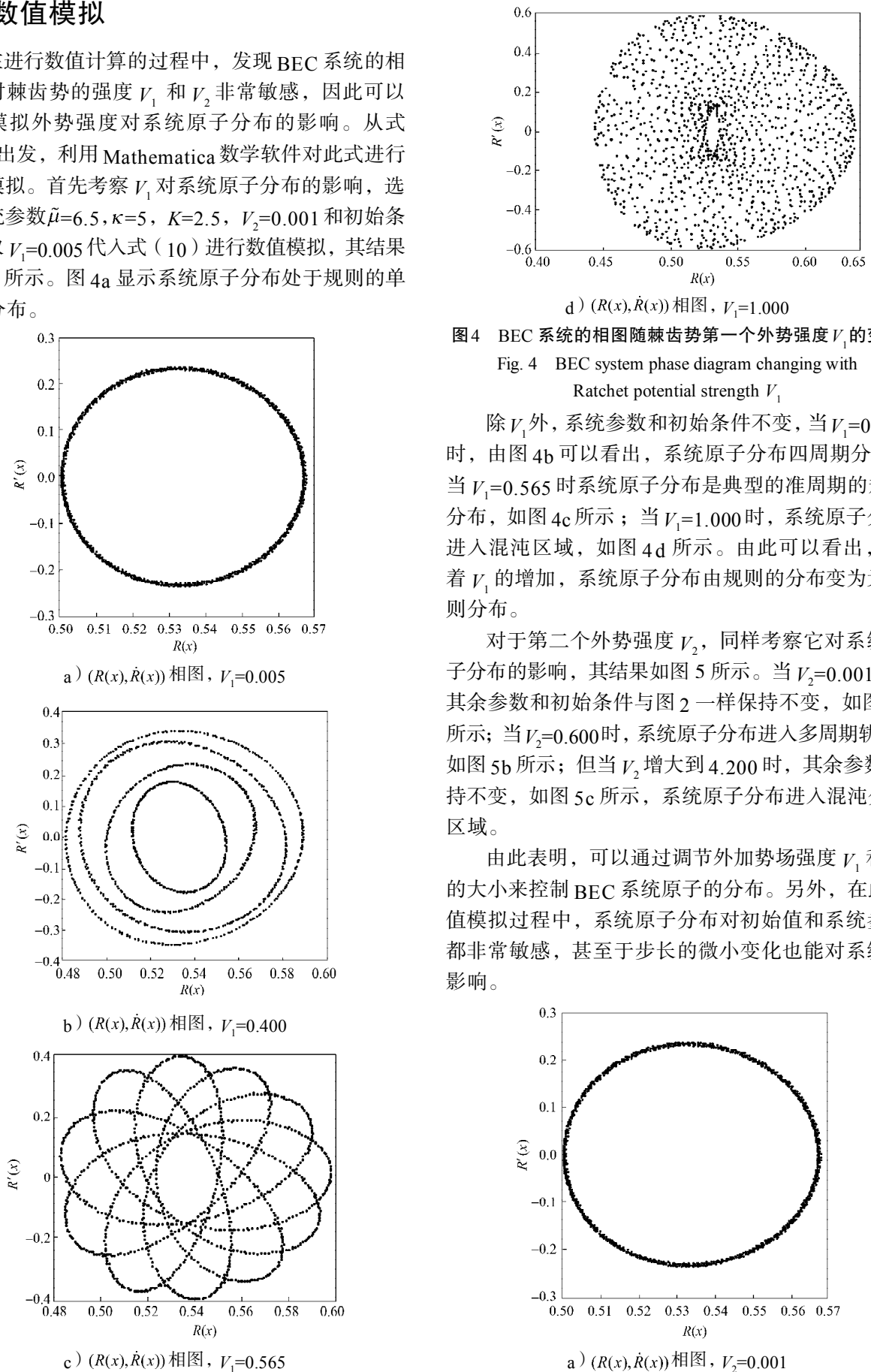
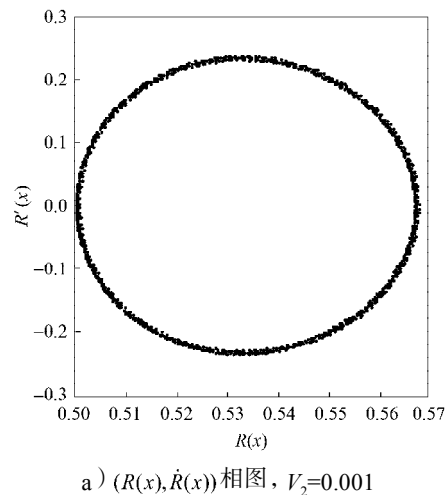


图4 BEC 系统的相图随棘齿势第一个外势强度 V_1 的变化
Fig. 4 BEC system phase diagram changing with Ratchet potential strength V_1

除 V_1 外, 系统参数和初始条件不变, 当 $V_1=0.400$ 时, 由图 4b 可以看出, 系统原子分布四周期分布; 当 $V_1=0.565$ 时系统原子分布是典型的准周期的规则分布, 如图 4c 所示; 当 $V_1=1.000$ 时, 系统原子分布进入混沌区域, 如图 4d 所示。由此可以看出, 随着 V_1 的增加, 系统原子分布由规则分布变为无规则分布。

对于第二个外势强度 V_2 , 同样考察它对系统原子分布的影响, 其结果如图 5 所示。当 $V_2=0.001$ 时, 其余参数和初始条件与图 2 一样保持不变, 如图 5a 所示; 当 $V_2=0.600$ 时, 系统原子分布进入多周期轨道, 如图 5b 所示; 但当 V_2 增大到 4.200 时, 其余参数保持不变, 如图 5c 所示, 系统原子分布进入混沌分布区域。

由此表明, 可以通过调节外加势场强度 V_1 和 V_2 的大小来控制 BEC 系统原子的分布。另外, 在此数值模拟过程中, 系统原子分布对初始值和系统参数都非常敏感, 甚至于步长的微小变化也能对系统有影响。



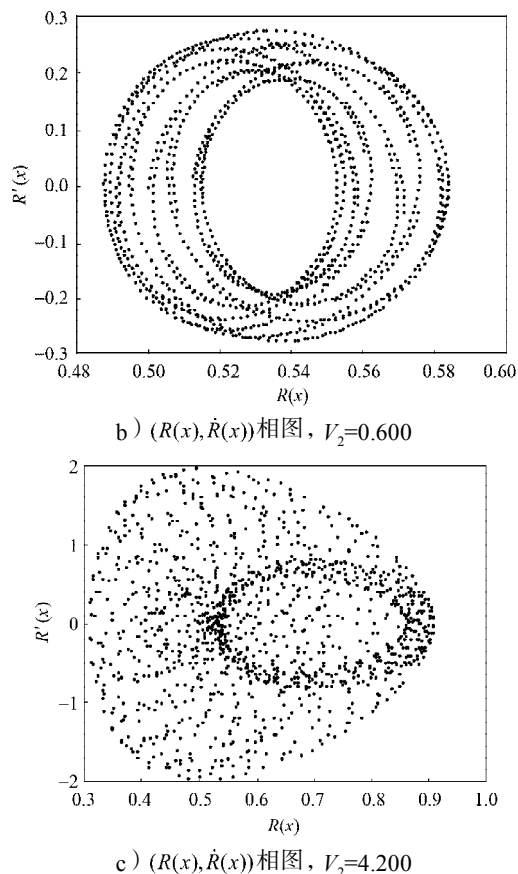


图5 BEC系统的相图随棘齿势第二个外势强度 V_2 的变化情况

Fig. 5 BEC system phase diagram changing with Ratchet potential strength V_2

4 结论

本文主要研究棘齿势中的玻色-爱因斯坦凝聚体原子的规则与混沌分布。通过等效势法,得到一维非线性薛定谔方程。通过对该方程的数值模拟,作出了在不同非线性参数而相同初始条件和其它相同参数条件下的相图。由对相图的分析得出,当非线性项增大时,系统原子由规则的分布进入到混沌分布。而后利用直接微扰法,构造了系统的微扰通解,其中该通解的有界性条件包含了 Melnikov 混沌判据,由此判据可以判断出系统中存在着混沌区域。由于混沌相图敏感地依赖于棘齿势的强度,所以可以通过调节棘齿势的强度对混沌加以控制,可根据需要,人为地让 BEC 系统原子分布处于规则的周期分布或混沌分布。

参考文献:

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, et al. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute

Atomic Vapor[J]. Science, 1995, 269(5221): 198-201.

[2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, et al. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms[J]. Phys Rev. Lett., 1995, 75(22): 3969-3973.

[3] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P, et al. Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases[J]. Rev. Mod. Phys., 1999, 71(3): 463-512.

[4] Strecher K E, Partridge G B, Truscott A G, et al. Formation and Propagation of Matter-Wave Soliton Trains [J]. Nature, 2002, 417(6885): 150-153.

[5] Wu Y, Yang X X, Xiao Y. Analytical Method for Yrast Line States in Interacting Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(11): 2200-2203.

[6] Liu W M, Wu B, Niu Q. Nonlinear Effects in Interference of Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(11): 2294-2297.

[7] Huang G X, Valeri A M, Manuel G V. Two-Dimensional Solutions in Bose-Einstein Condensates with a Disk-Shaped Trap[J]. Phys. Rev. A, 2003, 67(2): 023604.

[8] Xu Z J, Cheng C, Xiong H W. Density Distribution of Bose-Einstein Gas in a Three-Dimensional Optical Lattice [J]. Chin. Phys. Lett., 2003, 20(5): 611-614.

[9] Milburn G J, Corney J, Wright E M, et al. Quantum Dynamics of an Atomic Bose-Einstein Condensate in a Double-Well Potential[J]. Phys. Rev. A, 1997, 55(6): 4318-4324.

[10] Smerzi A, Fantoni S, Giovanazzi S, et al. Quantum Coherent Atomic Tunneling between Two Trapped Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(25): 4950-4953.

[11] Albiez M, Gati R, Fölling J, et al. Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction[J]. Phys. Rev. Lett., 2005, 95(1): 010402.

[12] Lundh E, Wallin M. Ratchet Effect for Cold Atoms in an Optical Lattice[J]. Phys. Rev. Lett., 2005, 94 (11): 110603.

[13] Mateos J L. Chaotic Transport and Current Reversal in Deterministic Ratchets[J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(2): 258-261.

[14] Francisco J C, Luis D, Parrondo J M R. Feedback Control in a Collective Flashing Ratchet[J]. Phys. Rev. Lett., 2004, 93(4): 040603.

[15] Majer J B, Peguiron J, Grifoni M, et al. Quantum Ratchet Effect for Vortices[J]. Phys. Rev. Lett., 2003, 90(5): 056802.

[16] Zapata I, Bartussek R, Sols F, et al. Voltage Rectification by a SQUID Ratchet[J]. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(11): 2292-2295.

[17] Mennerat-Robilliard C, Lucas D, Guibal S, et al. Ratchet for Cold Rubidium Atoms: The Asymmetric Optical Lattice [J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 82(4): 851-854.

[18] Fang J S, Zhang X P. Chaotic Ratchet Effect for Bose-

- Einstein Condensed Atoms in 1D Optical Lattices[J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 50(6): 1355-1360.
- [19] 陈文钦, 海文华, 李 辉, 等. 脉冲式棘齿势场作用下囚禁离子的规则与混沌运动[J]. 物理学报, 2007, 56(3): 1305-1312.
- Chen Wenqin, Hai Wenhua, Li Hui, et al. Regular and Chaotic Motions of a Single Trapped Ion Interacting with a Flashing Ratchet Potential[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(3): 1305-1312.
- [20] 曲春雷, 赵 清. 周期驱动玻色-爱因斯坦凝聚系统的棘齿效应[J]. 物理学报, 2009, 58(7): 4390-4395.
- Qu Chunlei, Zhao Qing. Quantum-Resonance Bose-Einstein Ratchet in a Kicked Condensate[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(7): 4390-4395.
- [21] Reimann P, Grifoni M, Hänggi P. Quantum Ratchets[J]. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(1): 10-13.
- [22] Thommen Q, Garreau J C, Zehnlé V, et al. Classical Chaos with Bose-Einstein Condensates in Tilted Optical Lattices[J]. Phys. Rev. Lett., 2003, 91(21): 210405.
- [23] Sakaguchi H, Malomed B A. Matter-Wave Solitons in Nonlinear Optical Lattices[J]. Phys. Rev. E, 2005, 72(4): 046610.
- [24] Porter M A, Kevrekidis P G, Malomed B A, et al. Modulated Amplitude Waves in Collisionally Inhomogeneous Bose Einstein Condensates[J]. Physica D, 2007, 229(2): 104-115.
- [25] Li F, Ren Z Z, Luo H L, et al. Spatial Chaos of Bose-Einstein Condensates in a Cigar-Shaped Trap[J]. Communications in Theoretical Physics, 2007, 48(1): 107-111.
- [26] Hai W H, Lee C, Chong G S, et al. Chaotic Probability Density in Two Periodically Driven and Weakly Coupled Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. E, 2002, 66(2): 026202.
- [27] Lee C H, Hai W H, Shi L, et al. Chaotic and Frequency-Locked Atomic Population Oscillations between Two Coupled Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. A, 2001, 64(5): 053604.
- [28] Abdullaev F K, Kraenkel R A. Coherent Atomic Oscillations and Resonances between Coupled Bose-Einstein Condensates with Time-Dependent Trapping Potential[J]. Phys. Rev. A, 2000, 62(2): 023613.
- [29] Hai W H, Liu X C, Fang J S, et al. Analytically Bounded and Numerically Unbounded Compound Pendulum Chaos [J]. Phys. Lett. A, 2000, 275(1/2): 54-59.
- [30] Hai W H, Duan Y X, Zhu X W, et al. Stable Orbits Embedded in a Chaotic Attractor for a Trapped Ion Interacting with a Laser Field[J]. Journal of Physics A: Math. Gen., 1998, 31(13). doi:10.1088/0305-4470/31/13/008.
- [31] Capecchi D, Bishop S R. Periodic Oscillations and Attracting Basins for a Parametrically Excited Pendulum[J]. Dynamics and Stability of Systems, 1994, 9(2): 123-143.

(责任编辑: 申 剑)