第26卷第3期
2012年5月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.26 No.3
May 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.03.003

用差分方法求解一类二阶两点边值问题

邹序焱

（宜宾学院 数学学院，四川 宜宾 644000）

摘　要：对一类二阶两点边值问题给出一种差分算法。该算法具有二阶精度，差分格式的系数矩阵为三对角矩阵，可用追赶法求解，并通过实例验证了算法的精度。

关键词：常微分方程；边值问题；差分算法；追赶法

中图分类号：O241.81　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)03-0013-03

Using Difference Method to Solve Second Order Two-Point Boundary Value Problem

Zou Xuyan

（School of Mathematical，Yibin University， Yibin Sichuan 644000，China）

Abstract：Presents a difference method to solve a second order two-point boundary value problem. The method has second-order accuracy, the coefficient matrix is tridiagonal matrix, and Thomas method is used to get the solutions. Through an example verifies the accuracy of the algorithm.

Keywords：ordinary differential equations; boundary value problem; difference algorithm; Thomas method

近年来，许多学者对非线性微分方程边值问题正解的存在性进行了研究[1-5]，如文献[5]利用不动点定理研究了边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)-\alpha(t)f(t,u(t))=0,\ a<t<b; \\ u(a)=u(b)=u''(b)=0。\end{cases}$$

得到了在一定条件下存在解的结论。

大多数文献都只证明了解的存在性，并未给出解的求法以及解的表达式，这是因为求边值问题的解析解比较困难。本文将采用差分方法讨论边值问题（1）的数值解法。

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+r(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x),\ a<x<b; \\ -y'(a)+\lambda_1 y(a)=\alpha; \\ y'(b)+\lambda_2 y(b)=\beta。\end{cases} \tag{1}$$

式中：$p(x)\in C^1[a,b]$，$p(x)\geqslant 0$；

$r(x)$，$f(x)\in C[a,b]$；

$\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2$为已知常数。

1　用差分方法求解边值问题

用有限差分方法解两点边值问题，一般分两步进行：

第一步　将求解区间进行网格剖分，取$h=\dfrac{b-a}{N}$为网格步长，以$x_m=a+mh(m=0,1,\cdots,N)$为网格结点，将区间$[a,b]$分成N等分。

第二步　用差商代替微商把原方程变成等价的离散方程。

对函数$y(x)\in C^1[a,b]$，以$x_m(m=0,1,\cdots,N)$为网格结

收稿日期：2012-03-15

基金项目：宜宾学院科研基金资助项目（2011Q25）

作者简介：邹序焱（1983-），男，湖南娄底人，宜宾学院教师，主要研究方向为数值计算方法，E-mail：281493260@qq.com

点，当步长 h 足够小时，根据导数定义可简单地用差商近似导数，故有以下公式 ：

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_m}=\frac{y(x_{m+1})-y(x_m)}{h}+o(h),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_m}=\frac{y(x_m)-y(x_{m-1})}{h}+o(h),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_m}=\frac{y(x_{m+1})-y(x_{m-1})}{2h}+o(h^2)。\qquad (2)$$

类似地有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x_m}=\frac{1}{h}\left(\left.p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{m+1/2}}-\left.p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{m-1/2}}\right)+o(h^2),\qquad (3)$$

式中：

$$\left.p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{m+1/2}}=p(x_{m+1/2})\frac{y(x_{m+1})-y(x_m)}{h}+o(h^2);$$

$$\left.p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{m-1/2}}=p(x_{m-1/2})\frac{y(x_m)-y(x_{m-1})}{h}+o(h^2)。$$

将式（2）和（3）代入式（1）得

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+r\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\\&-\frac{1}{h}\left(\left.p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{m+1/2}}-\left.p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{m-1/2}}\right)+\\&r(x_m)\frac{y(x_{m+1})-y(x_{m-1})}{2h}+o(h^2)=\\&-\frac{1}{h}\left(p(x_{m+1/2})\frac{y(x_{m+1})-y(x_m)}{h}-\right.\\&\left.p(x_{m-1/2})\frac{y(x_m)-y(x_{m-1})}{h}\right)+\\&r(x_m)\frac{y(x_{m+1})-y(x_{m-1})}{2h}+o(h^2)。\end{aligned}$$

为方便，简记为

$$y_m=y(x_m),p_{m+1/2}=p(x_{m+1/2}),f_m=f(x_m),r_m=r(x_m)。$$

因此式（1）可化为

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+r\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\\&-\frac{1}{h}\left(p_{m+1/2}\frac{y_{m+1}-y_m}{h}-p_{m-1/2}\frac{y_m-y_{m-1}}{h}\right)+\\&r_m\frac{y_{m+1}-y_{m-1}}{2h}+o(h^2)=f_m。\end{aligned}$$

其边值条件可化为：

$$-\frac{y_1-y_0}{h}+\lambda_1y_0=\alpha;$$

$$\frac{y_N-y_{N-1}}{h}+\lambda_2y_N=\beta。$$

略去 h^2 的高阶无穷小项 $o(h^2)$，则边值问题（1）的离散差分形式为：

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{h}\left(p_{m+1/2}\dfrac{y_{m+1}-y_m}{h}-p_{m-1/2}\dfrac{y_m-y_{m-1}}{h}\right)+\\ \qquad r_m\dfrac{y_{m+1}-y_{m-1}}{2h}=f_m,\\ -\dfrac{y_1-y_0}{h}+\lambda_1y_0=\alpha,\\ \dfrac{y_N-y_{N-1}}{h}+\lambda_2y_N=\beta。\end{cases}$$

这是一个关于 y_m 的方程组，其误差阶为 $o(h^2)$ [6]，即方程组为：

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{h}y_1+\left(\lambda_1+\dfrac{1}{h}\right)y_0=\alpha,\\ \left(\dfrac{r_1}{2h}-\dfrac{p_{1+1/2}}{h^2}\right)y_2+\left(\dfrac{p_{1+1/2}}{h^2}+\dfrac{p_{1-1/2}}{h^2}\right)y_1-\\ \qquad\left(\dfrac{p_{1-1/2}}{h^2}+\dfrac{r_1}{2h}\right)y_0=f_1,\\ \left(\dfrac{r_2}{2h}-\dfrac{p_{2+1/2}}{h^2}\right)y_3+\left(\dfrac{p_{2+1/2}}{h^2}+\dfrac{p_{2-1/2}}{h^2}\right)y_2-\\ \qquad\left(\dfrac{p_{2-1/2}}{h^2}+\dfrac{r_2}{2h}\right)y_1=f_2,\\ \qquad\vdots\\ \left(\dfrac{r_m}{2h}-\dfrac{p_{m+1/2}}{h^2}\right)y_{m+1}+\left(\dfrac{p_{m+1/2}}{h^2}+\dfrac{p_{m-1/2}}{h^2}\right)y_m-\\ \qquad\left(\dfrac{p_{m-1/2}}{h^2}+\dfrac{r_m}{2h}\right)y_{m-1}=f_m,\\ \qquad\vdots\\ \left(\dfrac{r_{N-1}}{2h}-\dfrac{p_{N-1/2}}{h^2}\right)y_N+\left(\dfrac{p_{N-1/2}}{h^2}+\dfrac{p_{N-3/2}}{h^2}\right)y_{N-1}-\\ \qquad\left(\dfrac{p_{N-3/2}}{h^2}+\dfrac{r_{N-1}}{2h}\right)y_{N-2}=f_{N-1},\\ \left(\lambda_2+\dfrac{1}{h}\right)y_N-\dfrac{1}{h}y_{N-1}=\beta。\end{cases}\qquad (4)$$

令 $\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_N)$；

$\boldsymbol{b}=(\alpha,f_1,\cdots,f_{N-1},\beta)$；

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1+\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N(N-1)} & a_{NN} & a_{N(N+1)} \\ & & & & -\frac{1}{h} & \lambda_2+\frac{1}{h}\end{bmatrix},$$

其中：$a_{21}=-\left(\dfrac{p_{1-1/2}}{h^2}+\dfrac{r_1}{2h}\right)$,

$$a_{22}=\frac{p_{1+1/2}}{h^2}+\frac{p_{1-1/2}}{h^2},$$

$$a_{23}=\frac{r_1}{2h}-\frac{p_{1+1/2}}{h^2};$$

$$a_{32}=-\left(\frac{p_{2-1/2}}{h^2}+\frac{r_2}{2h}\right),$$

$$a_{33}=\frac{p_{2+1/2}}{h^2}+\frac{p_{2-1/2}}{h^2},$$

$$a_{34}=\frac{r_2}{2h}-\frac{p_{2+1/2}}{h^2};$$

$$\vdots$$

$$a_{N(N-1)}=-\left(\frac{p_{N-3/2}}{h^2}+\frac{r_{N-1}}{2h}\right)$$

$$a_{NN}=\frac{p_{N-1/2}}{h^2}+\frac{p_{N-3/2}}{h^2},$$

$$a_{N(N+1)}=\frac{r_{N-1}}{2h}-\frac{p_{N-1/2}}{h^2}。$$

因此，方程组（4）可表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}。$$

由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三对角矩阵，故可用追赶法求解 [6-8]，且追赶法具有速度快，易编程的优点.

2　实例分析

例 1　用差分法求解两点值问题

$$\begin{cases}-y''+(1+\sin x)y'=\mathrm{e}^x\sin x,\ 0<x<1;\\ -y'(0)+y(0)=0;\\ y'(1)+y(1)=2\mathrm{e}。\end{cases}$$

解　按前面所述的方法得到的系数矩阵是三对角矩阵，用追赶法得到其数值解，并将数值解与精确解 $y(x)=\mathrm{e}^x$ 进行比较，见表 1。表中给出了 3 个结点处取不同步长时的数值解和精确解。

表 1　数值解与精确解

Table 1　Numerical solutions and exact solutions

h	x		
	1/4	2/4	3/4
1/4	1.299 78	1.652 56	2.121 92
1/8	1.286 96	1.644 54	2.111 97
1/16	1.285 73	1.645 56	2.111 91
$y=\mathrm{e}^x$	1.284 03	1.648 72	2.117 00

由表 1 中的数值结果可知，对此类二阶两点边值问题，本文所给的差分算法是可行的，也验证了理论分析的正确性。从计算结果看，当步长 h 取值较大时，计算结果的精度不高；h 取值较小时，计算结果的精度较高，但计算量较大。

参考文献：

[1]　Anderson D. Multiple Positive Solutions for a Three-Point Boundary Value Problem[J]. Mathematical and Computer Modelling，1998，27(6)：49-57.

[2]　El-Shahed M. Positive Solutions for Nonlinear Singular Third Order Boundary Value Problem[J]. Communications in Nonliner Science and Numerical Simulation，2009，14(2)：424-429.

[3]　Sun Yongping. Existence of Triple Positive Solutions for a Third-Order Three-Point Boundary Value Problem[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2008，221(1)：194-201.

[4]　Avery R. Multiple Positive Solutions of an nth Order Focal Boundary Value Problem[J]. Pan American Mathematical Journal，1998，8(1)：39-55.

[5]　Liu Zeqing，Ume J S，Kang S M. Positive Solutions of a Singular Nonlinear Third Order Two-Point Boundary Value Problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，326(1)：589-601.

[6]　孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京：科学出版社，2005：1-8.
Sun Zhizhong. Numerical Solution of Partial Differential Equations[M]. Beijing：Science Press，2005：1-8.

[7]　戴嘉尊，邱建贤. 微分方程数值解法[M]. 南京：东南大学出版社，2002：56-70.
Dai Jiazun，Qiu Jianxian. Numerical Solution of Differential Equations[M]. Nanjing：Southeast University Press，2002：56-70.

[8]　张文生. 科学计算中的偏微分方程有限差分法[M]. 北京：高等教育出版社，2006：13-17.
Zhang Wensheng. Finite Difference Methods for Partial Differential Equations in Science Computation[M]. Beijing：Higher Education Press，2006：13-17.

（责任编辑：邓光辉）