doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.02.016

非线性脉冲混合系统的指数ISS

刘东南[1,2]，肖伸平[1]，王 嵘[1]

（1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007；2. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：利用输入－状态稳定性（ISS）李雅普诺夫函数法，研究了非线性脉冲混合系统无外部输入时的指数稳定性，导出了具有外部输入时系统满足ISS的充分条件，从而给出了非线性脉冲混合系统的指数ISS的判据，并通过数值仿真验证了判据的有效性。

关键词：ISS；指数ISS；非线性；脉冲混合系统

中图分类号：TP273 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2012)02-0074-04

Exponential Input-to-State Stability for Nonlinear Impulsive Hybrid System

Liu Dongnan[1,2]，Xiao Shenping[1]，Wang Rong[1]

（1. School of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：By means of the ISS (input-state stability)-Lyapunov function method, studies the exponential stability of the nonlinear impulsive hybrid system without external input, derives sufficient conditions of the system for the ISS with input, and provides the exponential ISS criteria for the nonlinear impulsive hybrid system. By numerical simulation verifies the effectiveness of the criteria.

Keywords：ISS；exponential ISS；nonlinear；impulsive hybrid system

0 引言

在许多应用领域，连续事件动态系统和离散事件动态系统之间相互作用，因此，有必要对混合动力系统进行分析和设计。近年来，随着混合模型研究的深入，许多用来分析和优化不同类型脉冲混合系统的算法应运而生。

具有外部扰动输入的非线性系统的稳定性分析，是控制理论和控制工程中的重要内容[1]。脉冲混合系统是一类常见的控制系统，非线性脉冲混合系统状态的稳定性，是系统能否正常工作的关键。外部干扰输入往往使得稳定的系统变得不稳定，输入－状态稳定性（input-to-state stability，ISS）分析旨在考察外部扰动输入如何影响系统的稳定性。自从1989年E. D. Sontag[2]提出了ISS的概念后，学者们对ISS性能的分析越来越活跃，并将其成功应用于具有外部干扰的非线性系统的稳定分析与控制设计中[3]。近年来，国内外许多学者在非线性系统的ISS分析方面取得了较多的研究成果[4-17]。本文运用李雅普诺夫函数方法，给出了非线性脉冲混合系统的指数稳定性和指数ISS的充分条件，在满足假定条件的前提下，推出了一类非线性脉冲混合系统的指数输入－状态稳定性判据，并从数值方面进行了验证。

收稿日期：2012-01-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61174075，11101136），湖南省自然科学基金资助项目（11JJ2038，10JJ6098）
作者简介：刘东南（1983-），男，湖南邵阳人，湖南工业大学讲师，硕士生，主要研究方向为混合系统稳定分析及其应用，E-mail：Ladn55555@163.com

1 预备知识

定义 1[4]　函数 γ：$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 称为 k 类函数，如果它是连续、严格递增，且 $\gamma(0)=0$。特别地，如果它进一步满足 $\lim\limits_{s\to\infty}\gamma(s)=\infty$，则函数 γ 称为 k_∞ 类函数。

定义 2　连续函数 β：$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 称为 kL 函数，如果对于每个固定的 t，函数 $\beta(\cdot,t)$ 是 k 类的，而对于每个固定的 s，函数 $\beta(s,\cdot)$ 是递减的，并且 $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(s,t)=0$。

考虑具有输入的脉冲系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_\mathrm{c}),\ t\neq t_k;\\ \boldsymbol{x}_+=g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_\mathrm{d}),\quad t=t_k。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$u_\mathrm{c}\in\mathbf{R}^m$ 是一个局部有界的外部输入；$\boldsymbol{u}_\mathrm{d}\in\mathbf{R}^n$ 是脉冲扰动输入。

定义 3　称系统（1）是指数 ISS 的，如果存在函数 $\beta\in kL$ 和 $\gamma\in k_\infty$，使得对于每一个初始条件和每一个输入，系统（1）相应的解总存在，并满足

$$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\beta\left(\left|\boldsymbol{x}(t_0)\right|,t-t_0\right)+\gamma_\mathrm{c}\left(\left\|\boldsymbol{u}_\mathrm{c}\right\|_{[t_0,t]}\right)+\gamma_\mathrm{d}\left(\left\|\boldsymbol{u}_\mathrm{d}\right\|_{[t_0,t]}\right),\ \forall t>t_0,$$

式中 $\|\ \|_\tau$ 表示在时间间隔 τ 上的范数的上确界。

2 主要结果

先考虑无外部输入的非线性脉冲混合系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\varphi(\boldsymbol{x}),\ t\neq t_k;\\ \Delta\boldsymbol{x}(t_k^+)=g(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t_k),\ t=t_k;\\ \quad k=N_i=\{1,2,\cdots\}。\end{cases}\tag{2}$$

式中，非线性函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 满足 Lipschitz 条件

$$|\varphi(\boldsymbol{x})|\leqslant L\boldsymbol{x}。$$

本文假设：

1）λ_1 和 β_k 分别是 $(\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})$ 和 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_k)^\mathrm{T}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_k)$ 的最大特征值；

2）存在正常数 c 和 d，满足

$$\lambda_1+2L=-c,$$

$$\sup\left\{\frac{\sum\limits_{j=0}^{k}\ln\beta_j}{k-k_0}\right\}\leqslant-d,\tag{3}$$

式中：$k\in N=\{1,2,\cdots\},k-k_0=N_i$。

定理 1　在外部干扰为零的时刻，假设条件 1）和 2）成立，则系统具有指数稳定性。

证　令李雅普诺夫函数的形式为

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}。$$

由假设 1）得系统（2）的李亚普诺夫函数的导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))&=\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}=\\ &\boldsymbol{x}^\mathrm{T}\left(\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}+2L\boldsymbol{x}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\leqslant\\ &\left[\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\right)+2L\right]V(\boldsymbol{x})\leqslant\\ &(\lambda_1+2L)V(\boldsymbol{x})=-cV(\boldsymbol{x}(t))。\end{aligned}\tag{4}$$

由系统（2）的第二个方程得

$$\begin{aligned}V\left(\boldsymbol{x}(t_k^+)\right)&=\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t_k^+)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t_k^+)=\\ &\boldsymbol{x}^\mathrm{T}(t_k^+)\left[(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_k)^\mathrm{T}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_k)\right]\boldsymbol{x}(t_k^+)\leqslant\\ &\beta_kV\left(\boldsymbol{x}(t_k^+)\right)。\end{aligned}\tag{5}$$

综合式（4）和（5）得

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x}(t))&\leqslant V\left(\boldsymbol{x}(t_0)\right)\beta_1\beta_2\cdots\beta_k\,\mathrm{e}^{-c(t-t_0)}=\\ &V\left(\boldsymbol{x}(t_0)\right)\mathrm{e}\sum_{j=0}^{k}\ln\beta_j\cdot\mathrm{e}^{-c(t-t_0)}。\end{aligned}$$

由假设 2）中式（3）得

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x}(t))&\leqslant V\left(\boldsymbol{x}(t_0)\right)\cdot\mathrm{e}^{-d(k-k_0)-c(t-t_0)}=\\ &V\left(\boldsymbol{x}(t_0)\right)\cdot\mathrm{e}^{-dN_i-c(t-t_0)}。\end{aligned}\tag{6}$$

因此，系统（2）的解 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0))$ 满足指数稳定性。定理证毕。

再考虑一般的情形，即有外部扰动输入的情形，有定理 2。

定理 2　假设存在系统（1）的局部满足 Lipschitz 条件的指数 ISS 李雅普诺夫函数 V：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \chi_\mathrm{c},\ \chi_\mathrm{d}\in k_\infty$ 和 $c>\bar{c}>0,\ d>\bar{d}>0$ 满足：

3）$\alpha_1(|\boldsymbol{x}|)\leqslant V(\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_2(|\boldsymbol{x}|)$；

4）$D^+V(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_\mathrm{c})\leqslant-cV(\boldsymbol{x})+\chi_\mathrm{c}(|\boldsymbol{u}_\mathrm{c}|)$；

5）$V\left(g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_\mathrm{d})\right)\leqslant\mathrm{e}^{-d}V(\boldsymbol{x})+\chi_\mathrm{d}(|\boldsymbol{u}_\mathrm{d}|)$。

则系统（1）是指数 ISS 的。

证　由条件 4）变形得

$$D^+\left(\mathrm{e}^{c\xi}V(\xi)\right)\leqslant\mathrm{e}^{c\xi}\chi_\mathrm{c}(|\boldsymbol{u}_\mathrm{c}|),$$

整理不等式两边，得

$$V(t)\leqslant\mathrm{e}^{-c(t-t_k)}V(t_k)+\frac{1}{c}\chi_\mathrm{c}(|\boldsymbol{u}_\mathrm{c}|)。\tag{7}$$

由条件 4）得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leqslant-\bar{c}V(\boldsymbol{x})-(c-\bar{c})V(\boldsymbol{x})+\chi_\mathrm{c}(|\boldsymbol{u}_\mathrm{c}|),$$

即有

$$(c-\bar{c})V(\boldsymbol{x})\geqslant\chi_\mathrm{c}(|\boldsymbol{u}_\mathrm{c}|),$$

从而得

$$V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant-\bar{c}V(\boldsymbol{x}(t)),$$

$$V(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant \frac{1}{c-\bar{c}} \chi_{\mathrm{c}}\left(\left|\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\right|\right)。$$

类似地，由条件5）得

$$V\left(\boldsymbol{x}\left(t_k\right)\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\bar{d}} V\left(\boldsymbol{x}\left(t_k^{-}\right)\right), \tag{8}$$

$$V\left(\boldsymbol{x}\left(t_k^{-}\right)\right) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{-\bar{d}}-\mathrm{e}^{-d}} \chi_{\mathrm{d}}\left(\left|\boldsymbol{u}_d\right|\right)。 \tag{9}$$

综合式（7）~（9）得，当$t=t_k$时，

$$V(t) \leqslant \mathrm{e}^{-c\left(t-t_k\right)} \mathrm{e}^{-\bar{d}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{-\bar{d}}-\mathrm{e}^{-d}} \chi_{\mathrm{d}}\left(\left|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}\right|\right)+\frac{1}{c} \chi_c\left(\left|\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\right|\right) \leqslant$$

$$\mathrm{e}^d \cdot \mu \chi_{\mathrm{d}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right)+\mu \chi_{\mathrm{c}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right), \tag{10}$$

式中$\mu=\min \left(\frac{1}{c-\bar{c}}, \frac{1}{e^{-\bar{d}}-e^{-d}}\right)>0$。

由式（6）和（10）得

$$\left|\boldsymbol{x}(t)\right| \leqslant \alpha_1^{-1}\left(\mathrm{e}^{-dN-c\left(t-t_0\right)} \alpha_2\left(\boldsymbol{x}\left(t_0\right)\right)\right)+$$

$$\alpha_1^{-1}\left(\mathrm{e}^d \cdot \mu \cdot \chi_{\mathrm{d}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right)\right)+\alpha_1^{-1}\left(\mu \cdot \chi_{\mathrm{c}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right)\right)=$$

$$\beta\left(\boldsymbol{x}\left(t_0\right), t-t_0\right)+\gamma_{\mathrm{c}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right)+\gamma_{\mathrm{d}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right)。$$

令

$$\beta(r, t)=\alpha_1^{-1}\left(\mathrm{e}^{dN-ct} \alpha_2(r)\right),$$

$$\gamma_1(r)=\alpha_1^{-1}\left(\mu \chi_{\mathrm{c}}(r)\right),$$

$$\gamma_2(r)=\alpha_1^{-1}\left(\mathrm{e}^d \cdot \mu \chi_{\mathrm{d}}(r)\right)。$$

从而有

$$\left|\boldsymbol{x}(t)\right| \leq \beta\left(\left|\boldsymbol{x}\left(t_0\right)\right|, t-t_0\right)+\gamma_{\mathrm{c}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right)+$$

$$\gamma_{\mathrm{d}}\left(\left\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}\right\|_{\left[t_0, t\right]}\right), \forall t>t_0。$$

所以系统（1）是指数ISS的。证毕。

3 仿真

考虑带有外部输入的非线性脉冲混合系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\varphi(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}, \\ \Delta \boldsymbol{x}\left(t_k^{+}\right)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\left(t_k\right)+\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}, \\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0。\end{cases} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.6\end{bmatrix}$；

$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0 & -x_1 \sin x_3 & x_1 \sin x_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{B}=0.1\boldsymbol{I}$；

$\boldsymbol{x}_0=[0.6 \quad -0.3 \quad -0.1]^{\mathrm{T}}$为给定初始值。

令$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=\boldsymbol{0}$，即无外部扰动输入时，系统的稳定性数值模拟结果见图1。由图1可知，系统是稳定的。

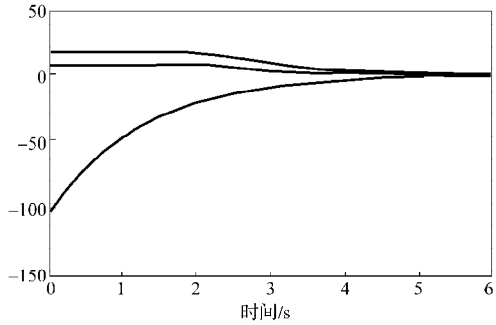

图1 系统稳定性数值模拟结果

Fig.1 The numerical simulation results of the system stability

取随机输入：

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}}=0.1[\mathrm{rand}(1) \quad \mathrm{rand}(1) \quad \mathrm{rand}(1)]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{u}_{\mathrm{d}}=0.2[\mathrm{rand}(2) \quad (\mathrm{rand}(2) \quad (\mathrm{rand}(2)]^{\mathrm{T}}$，

其中$0<\mathrm{rand}(1)<1$，即有外部扰动输入时，其指数ISS性数值模拟结果见图2。由图2可知，脉冲混合系统是指数ISS的。

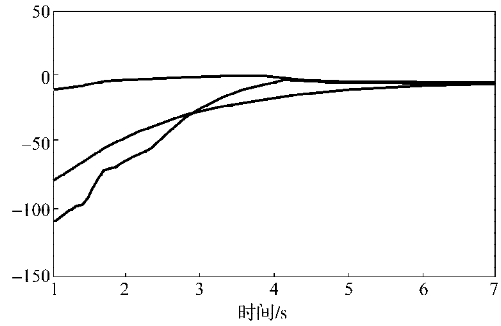

图2 系统指数ISS数值模拟结果

Fig. 2 The numerical simulation results of the system exponential ISS

4 结语

本文分析了非线性脉冲混合系统的指数稳定性与ISS条件。若非线性脉冲混合系统的李雅普诺夫函数满足相应充分条件，则系统的指数ISS可达到，并用数值仿进行了验证。本文结果对非线性脉冲混合系统控制器的设计有一定的参考价值。

参考文献：

[1] Isidori A. Nonlinear Control Systems[M]. 2nd ed. New York：Springer Verlag，1989：12-16.

[2] Sontag E D. Remarks on Stabilization and Input-to-State Stability[C]//Proc. IEEE Conf. Decision and Control. Tampa：IEEE Publications，1989：1376-1378.

[3] Sontag E D. Comments on Intergral Variants of ISS[J]. Systems and Control Letters，1998，34(1/2)：93-100.

[4] 范子彦，韩正之. 非线性控制系统的输入－状态稳定性及有关问题[J]. 控制理论与应用，2001，18(4)：473-477.
Fan Ziyan，Han Zhengzhi. Input-to-State Stability of Nonlinear Systems and Correlative Problems[J]. Control Theory and Applications，2001，18(4)：473-477.

[5] Liu B，Liu X Z，Teo K L. et al. Razumikhin-Type Theorems on Exponential Stability of Impulsive Delay Systems[J]. IMA J. Appl. Math.，2006，71(1)：47-61.

[6] Liu B，Marquez H J. Quasi-Exponential Input-to-State Stability for Discrete-Time Impulsive Hybrid Systems[J]. International Journal of Control，2007，80(4)：540-554.

[7] Liu B，Tang Q，Xiao S P，et al. Exponential ISS Properties for Impulsive Interconnected Systems[C]//Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. Beijing：Conference Publications，2010：1506-1510.

[8] Chen L P，Ma Z H，Duan S L. The Exponential ISS Stability for Nonlinear Impulsive Hybrid Systems[C]// 2010 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA). Changsha：Conference Publications，2010：807-810.

[9] Hespanha J P，Liberzon D，Teel A R. On Input-to-State Stability of Impulsive Systems[C]// CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. [S. l.]：Conference Publications，2005：3992-3997.

[10] Chen W H，Zheng W X. Input-to-State Stability and Integral Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems with Delays[J]. Automatica，2009，45(6)： 1481-1488.

[11] 刘　斌，刘新芝，廖晓昕. 混合脉冲系统稳定性分析的近期进展[J]. 株洲工学院学报，2002，16(1)：29-32.
Liu Bin，Liu Xingzhi，Liao Xiaoxin. Recent Trends in Stability Analysis of Hybrid Impulsive Systems[J]. Journal of Zhuzhou Institute of Technology，2002，16(1)：29-32.

[12] 高春华，王　慧，李　平. 混合系统建模、分析与综合：研究进展与展望[J]. 系统工程理论与实践，2002(11)：15-20.
Gao Chunhua，Wang Hui，Li Ping. Modeling，Analysis and Synthesis of Hybrid Systems：a Review[J]. Systems Engineering-Theory and Practice，2002(11)：15-20.

[13] 张艳燕， 傅希林. 脉冲混合系统的稳定性分析[J]. 山东师范大学学报：自然科学版，2003，18(2)：1-3.
Zhang Yanyan，Fu Xilin. Stability Analysis for Implusive Hybrid Systems[J]. Journal of Shandong Normal University：Natural Science，2003，18(2)：1-3.

[14] 张建平，刘　凯，郭晓丽. 离散时间系统的ISS稳定性及等价条件[J]. 郑州轻工业学院学报：自然科学版，2008，23(2)：117-119.
Zhang Jianping，Liu Kai，Guo Xiaoli. Input-State Stability of Discrete Time Systems and Equivalence[J]. Journal of Zhenzhou University of Light Industry：Natural Science，2008，23(2)：117-119.

[15] 杨　春，李　征，周晓青. 混合系统在Matlab环境下的建模和仿真[J]. 计算机仿真，2008，25(12)：312-315.
Yang Chun，Li Zheng，Zhou Xiaoqing. Modeling and Simulation of Hybrid Systems in Matlab Environmente[J]. Computer Simulation，2008，25(12)：312-315.

[16] 马合保，康会光. 非线性广义系统的输入－状态稳定性[J]. 安徽大学学报：自然科学版，2009，33(2)：9-11.
Ma Hebao，Kang Huiguang. Input-State Stability of Nonlinear Descriptor Systems[J]. Journal of Anhui University：Natural Science Edition，2009，33(2)：9-11.

[17] 张超龙，杨逢建，杨建富. 脉冲混合系统研究进展[J]. 仲恺农业工程学院学报，2009，22(1)：61-65.
Zhang Chaolong，Yang Fengjian，Yang Jianfu. Review of Impulsive Hybrid System[J]. Journal of Zhongkai University of Agriculture and Engineering，2009，22(1)：61-65.

（责任编辑：邓光辉）