

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.02.013

# 基于改进趋近率的滑模控制方法及应用

朱 剑, 张昌凡, 崔茂振, 黄 刚

(湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412007)

**摘 要:** 从抖振问题入手, 提出了一种改进的趋近率方法, 即在双幂次趋近率方法的基础上增加指数项, 并给出了控制系统到达滑模面时间的具体计算。该方法克服了单幂次趋近率趋近滑模面时间长、抖振大的缺陷, 保证了控制系统的动态品质。将其运用到二个二阶系统中, 并与单幂次趋近率方法作比较, 仿真验证了该方法的有效性。

**关键词:** 滑模变结构; 抖振; 双幂次指数趋近率

**中图分类号:** TM571

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2012)02-0060-04

## The Sliding Mode Control Method Based on Improved Reaching Law and Its Application

Zhu Jian, Zhang Changfan, Cui Maozhen, Huang Gang

(School of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** Beginning with the reasons of chattering, proposes an improved sliding mode reaching law, which adds an exponential term on the bi-power reaching law and gives a specific method for calculating the arrival time of the control system to the sliding surface. It overcomes the defects of the single power reaching law which approaching the sliding surface for a long time and chattering bigger, and ensures dynamic quality of the system. Applies it to a two-order system, and makes a comparison with the single power reaching law, the simulation results verify the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** sliding mode control; chattering; double power exponential reaching law

## 0 引言

滑模变结构控制的突出特点是具有较强的鲁棒性。在各种非线性系统中, 由于存在时间或空间上的时滞及惯性的影响, 造成滑模变结构的抖振。抖振的发生影响控制系统的精确性, 还可能激发系统未建模部分的强烈振荡, 对系统造成危害。因此, 抖振的抑制问题成为滑模变结构控制研究中的重要课题。国内外许多学者针对滑模变结构控制中的抖振抑制问题进行了大量研究, 文献[1]针对离散系统提

出自适应边界层, 在传统边界层的基础上增加衰减项, 从而有效地抑制了系统抖振。文献[2]提出了以状态接近角为变量的变边界层法, 并运用到倒立摆中, 保证了系统的稳定性。文献[3]设计了用状态的模来调整边界层宽度的滑模控制器, 控制系统状态, 从而有效地减少了系统控制信号中的抖振现象。文献[4-5]设计了基于神经网络自适应调整切换增益的滑模控制器, 分别应用于船舶航向控制系统和异步电动机, 有效地减少了系统的抖振。文献[6]将变指

收稿日期: 2012-01-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61104024), 湖南省教育厅科研基金资助项目(10C0603)

作者简介: 朱 剑(1985-), 男, 湖北荆门人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为现代控制理论及其在电力电子中的应用, E-mail: zhujianhubei@163.com

数趋近率方法用于永磁同步电机直接转矩控制,解决了传统直接转矩控制存在的磁链和转矩脉动大、逆变器开关不恒定、转矩脉动噪声频率高等问题。文献[7]提出了加衰减项的指数趋近率方法,并用于非匹配不确定系统,达到了抑制抖振和保证系统平稳性的要求。文献[8]提出了双幂次趋近率方法,并应用于机器人的轨迹跟踪控制,进一步削弱了抖振,提高了系统的动态品质。

本文在文献[8]的基础上,提出了一种改进的双幂次趋近率方法,即在双幂次趋近率后面加一指数项,并将该方法运用到二阶系统进行仿真。

## 1 双幂次指数趋近率

20世纪80年代,高为炳<sup>[9]</sup>提出了趋近率的概念,并设计了单幂次趋近率

$$\dot{s} = -\varepsilon |s|^\alpha \operatorname{sgn} s, \quad (1)$$

式中,  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ 。

当控制系统状态接近滑模面时,趋近速度随着距离的减小而降低,有利于削弱抖振;但是,当系统状态远离滑模面时,单幂次趋近率存在趋近速度小、趋近时间长的问题。

为改善控制系统的动态品质,进一步削弱抖振,结合单幂次趋近率的特点,给出一种改进的趋近率方法——双幂次指数趋近率:

$$\dot{s} = -\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s - \varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s - ks, \quad (2)$$

式中,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ,  $k > 0$ 。

式(2)中,当  $|s| < 1$  时,减小  $\alpha$  的值可增大系统状态的趋近速度;当  $|s| > 1$  时,  $\alpha$  越小,  $-\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s$  项在式中所起的作用越小,与  $-\varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s$  项相比,可忽略其对系统的影响。当  $|s| > 1$  时,增大  $\beta$  的值可增大系统状态的趋近速度;当  $|s| < 1$  时,  $\beta$  越大,  $-\varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s$  项在式中所起的作用越小,与  $-\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s$  项相比,可忽略其对系统的影响。

式(2)中的前2项,相当于对系统采用了分段控制,从而使系统在分界点不能平滑过渡,影响了系统的动态品质。为了克服这一缺陷,增加第三项  $ks$  来缓解系统在分界点的不连续性,并使系统抖振以指数的形式衰减,从而削弱系统的抖振,保证系统的稳定性。另外,由式(2)可知,当  $s=0$  时,  $\dot{s}=0$ 。所以,在系统到达滑模面时,速度减小为0,实现了系统状态的平滑过渡。

## 2 系统动态品质分析

一种好的趋近率方法,既要保证系统能快速稳

定地到达滑模面,又要使系统在到达滑模面时的速度尽可能小,实现与滑模面的平滑过渡,抑制系统的抖振。

式(2)中设计的双幂次指数趋近率包括3项,其中,  $-\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s$  项保证当系统状态接近滑模面时 ( $|s| < 1$ ) 的动态品质;  $-\varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s$  项则保证当系统状态远离滑模面时 ( $|s| > 1$ ) 的动态品质;  $ks$  项主要保证分界点系统的平滑过渡。3项结合使系统从任意初始状态都能快速且平滑地到达滑模面。

1) 可达性

因为

$$\begin{aligned} s\dot{s} &= -\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s - \varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s - ks^2 = \\ &= -\varepsilon_1 |s|^{\alpha+1} - \varepsilon_2 |s|^{\beta+1} - ks^2 < 0, \end{aligned}$$

所以式(2)满足到达条件。

2) 到达滑模面时间的有限性

假定初始状态  $s(0) > 1$ , 将系统从初始状态到达滑模面  $s=0$  分为2个阶段:从初始状态到达  $s=1$ , 从  $s=1$  到达滑模面。

在第一阶段,即系统从初始状态到达  $s=1$  的过程中,因为  $s > 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ , 所以式(2)中第二项  $-\varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s$  的作用远大于第一项  $-\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s$ , 忽略第一项的影响,从而由

$$\dot{s} = -\varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s - ks = -\varepsilon_2 s^\beta - ks,$$

计算系统从初始状态到达  $s=1$  的时间,因此有

$$\frac{ds}{dt} + ks = -\varepsilon_2 s^\beta。$$

对上述伯努利方程求解,两边同时乘以  $s^{-\beta}$ , 得

$$s^{-\beta} \frac{ds}{dt} + ks^{1-\beta} = -\varepsilon_2, \quad (3)$$

令  $z = s^{1-\beta}$ , 则

$$\frac{dz}{dt} = (1-\beta)s^{-\beta} \frac{ds}{dt}。$$

将式(3)两边同时乘以  $(1-\beta)$ , 得线性非齐次微分方程

$$\frac{dz}{dt} + (1-\beta)kz = -\varepsilon_2(1-\beta)。$$

式中,令  $P(t)=k(1-\beta)$ ,  $Q(t)=-\varepsilon_2(1-\beta)$ , 并代入线性非齐次微分方程的通解公式得

$$\begin{aligned} z &= ce^{-\int k(1-\beta)dt} + e^{-\int k(1-\beta)dt} \cdot \int -\varepsilon_2(1-\beta)e^{\int k(1-\beta)dt} dt = \\ &= ce^{k(\beta-1)t} + e^{k(\beta-1)t} \cdot \frac{\varepsilon_2(\beta-1)e^{k(1-\beta)t}}{k(1-\beta)} = \end{aligned}$$

$$ce^{k(\beta-1)t} - \frac{\varepsilon_2}{k}。$$

又因为

$$z = s^{1-\beta},$$

从而有

$$s^{1-\beta} = ce^{k(\beta-1)t} - \frac{\varepsilon_2}{k},$$

当  $t=0$  时,  $s=s(0)$ , 由上式解得

$$c = s(0)^{1-\beta} + \frac{\varepsilon_2}{k},$$

则有

$$s^{1-\beta} = \left[ s(0)^{1-\beta} + \frac{\varepsilon_2}{k} \right] e^{k(\beta-1)t} - \frac{\varepsilon_2}{k}. \quad (4)$$

因此, 从式 (4) 解得, 系统从初始状态  $s=s(0)$  到  $s=1$  所需的时间

$$t_1 = \frac{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{k}\right) - \ln\left[s(0)^{1-\beta} + \frac{\varepsilon_2}{k}\right]}{k(\beta-1)}. \quad (5)$$

在第二阶段, 即系统从  $s=1$  到达滑模面  $s=0$  的过程中, 因为  $0 < s < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ , 所以式 (2) 中第一项  $-\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s$  的作用远大于第二项  $-\varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s$ , 忽略第二项的影响, 从而由

$$\dot{s} = -\varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s - ks = -\varepsilon_1 s^\alpha - ks$$

计算系统从  $s=1$  到达滑模面  $s=0$  的时间, 因此有

$$\frac{ds}{dt} + ks = -\varepsilon_1 s^\alpha.$$

对上述伯努利方程, 仿照第一阶段所述的求解方法, 可得

$$s^{1-\alpha} = \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{k}\right) e^{k(\alpha-1)t} - \frac{\varepsilon_1}{k}. \quad (6)$$

因此, 从式 (6) 解得, 系统从  $s=1$  到达滑模面  $s=0$  所需要的时间

$$t_2 = \frac{\ln \varepsilon_1 - \ln(k + \varepsilon_1)}{k(\alpha-1)}. \quad (7)$$

由于上述所求的时间都是在忽略了趋近率表达式中的一项得到的, 所以, 从初始状态到滑模面总共需要的时间

$$t < t_1 + t_2 = \frac{\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{k}\right) - \ln\left[s(0)^{1-\beta} + \frac{\varepsilon_2}{k}\right]}{k(\beta-1)} + \frac{\ln \varepsilon_1 - \ln(k + \varepsilon_1)}{k(\alpha-1)}.$$

当初始状态  $s(0) < -1$  时, 将系统从初始状态到达滑模面分为: 从初始状态到达  $s(0)=-1$  和从  $s(0)=-1$  到达滑模面 2 个阶段, 分析过程与前面相同, 不再赘述。

### 3 仿真实验

将双幂次指数趋近率和单幂次趋近率方法运用

于二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + u; \end{cases} \quad (8)$$

选定的滑模面为  $s=cx_1+x_2$ , 其中  $c=2$ 。

用 Matlab/Simulink 仿真, 并对仿真结果进行比较。

#### 3.1 按单幂次趋近率仿真

按式 (1) 设计控制器, 有

$$u = -(c+2)x_2 - x_1 - \varepsilon |s|^\alpha \operatorname{sgn} s;$$

并取式 (1) 中  $\alpha=0.01$ ,  $\varepsilon=3.5$ , 得

$$\dot{s} = -3.5 |s|^{0.01} \operatorname{sgn} s.$$

仿真结果见图 1~2。

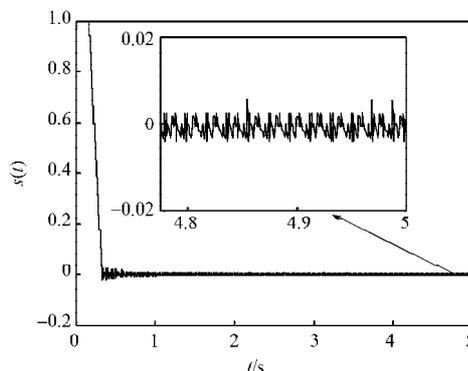


图 1 单幂次  $s(t)$  的仿真

Fig. 1 Single power simulation of  $s(t)$

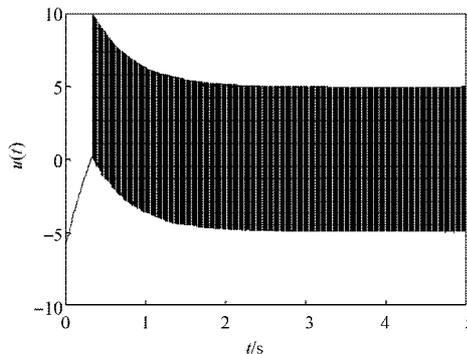


图 2 单幂次  $u(t)$  的仿真

Fig. 2 Single power simulation of  $u(t)$

由图 1 可知, 采用单幂次趋近率, 刚到达滑模面时, 抖振较大, 且成高频抖振, 抖振衰减速度缓慢, 系统状态在切换带中向原点运动, 最后系统逐渐稳定于原点附近的一等幅区域。图 2 进一步验证了图 1 的结论。

#### 3.2 按双幂次指数趋近率仿真

按式 (2) 设计控制器, 有

$u = -(k+c+2)x_2 - (kc+1)x_1 - \varepsilon_1 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s - \varepsilon_2 |s|^\beta \operatorname{sgn} s$ ; 并取式 (2) 中  $k=10$ ,  $\varepsilon_1=3.5$ ,  $\varepsilon_2=5$ ,  $\alpha=0.01$ ,  $\beta=2$ , 得

$$\dot{s} = -3.5 |s|^{0.01} \operatorname{sgn} s - 5 |s|^2 \operatorname{sgn} s - 10s.$$

仿真结果如图3~4。

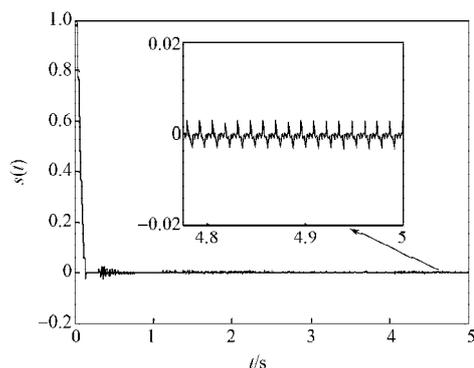


图3 双幂次  $s(t)$  的仿真

Fig. 3 Double power simulation of  $s(t)$

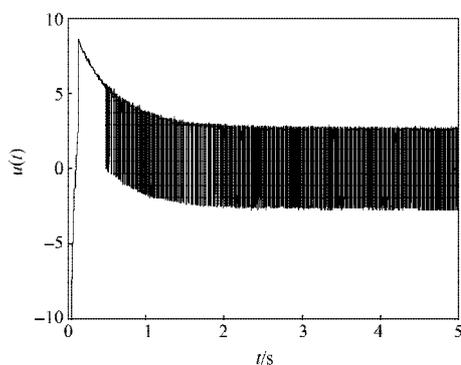


图4 双幂次  $u(t)$  的仿真

Fig. 4 Double power simulation of  $u(t)$

由图3可知,系统状态趋近滑模面的速度较快,刚到达滑模面时系统抖振较弱,频率较低,然后抖振迅速衰减,最后系统逐渐稳定于原点附近一很小的等幅区域。这表明双幂次指数趋近率法大大地改善了刚到达滑模面时系统抖振频率,且削弱了系统的抖振。图4进一步验证了图3的结论。

将图3~4与图1~2比较可知,双幂次指数趋近率方法与单幂次趋近率方法相比,当状态 $s$ 在距滑模面较远时,趋近速度较快;当接近滑模面时,趋近速度较慢。同时,采用双幂次指数趋近率,系统的抖振频率得到较好改善,抑制抖振的效果较明显。

## 4 结语

本文针对采用单幂次趋近率方法,控制系统状态到达滑模面时间长,刚到达滑模面时作高频抖振且振幅较大的缺陷,提出了一种改进的趋近率方法,能在保证系统动态品质的基础上,最大限度地削弱抖振,降低系统状态到达滑模面时的抖振频率,缩短到达滑模面的时间。

## 参考文献:

- [1] Su Shibin, Wang Heng, Zhang Hua, et al. Design of Discrete Variable Structure Controller Based on Variable Boundary Layer[C]//2010 International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering (CMCE). Changchun: Conference Publications, 2010: 71-78.
- [2] Rafimanzelat M R, Yazdanpanah M J. A Novel Low Chattering Sliding Mode Controller[C]//5th Asian Control Conference. Melbourne: Conference Publications, 2004: 1958-1963.
- [3] Chen M S, Hwang Y R, Tomizuka M. Sliding Mode Control Reduced Chattering for Systems with Dependent Uncertainties[C]//Proceeding of the 2004 IEEE International Conference On Networking. Taipei: Conference Publications, 2004: 967-971.
- [4] Han Yaozhen, Xiao Hairong, Pan Weigang. Research on Rbfnn Sliding Mode Control and Its Application in Ship Course Control[C]//2010 Second International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing (CINC). Wuhan: Conference Publications, 2010: 60-63.
- [5] Ma Qian, Luo Pei, Huang Huixian. Induction Motor Vector Control Based on Immune RBF Neural Network Sliding Mode Variable Control[C]//2009 International Conference on Signal Processing Systems. Singapore: Conference Publications, 2009: 541-545.
- [6] 童克文, 张兴, 张昱, 等. 基于新型趋近律的永磁同步电动机滑模变结构控制[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(21): 102-106.  
Tong Kewen, Zhang Xing, Zhang Yu, et al. Sliding Mode Variable Structure Control of Permanent Magnet Synchronous Machine Based on a Novel Reaching Law[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(21): 102-106.
- [7] Zong Qun, Zhao Zhanshan, Dou Liqian, et al. Integral Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Mismatched Uncertain Systems[C]//Systems and Control in Aerospace and Astronautics. Tianjin: Conference Publications, 2008: 1-4.
- [8] 梅红. 移动机械手的逆运动学及滑模变结构轨迹跟踪控制研究[D]. 济南: 山东大学, 2009.  
Mei Hong. Mobile Manipulator Inverse Kinematics and Study for Trajectory Tracking of Sliding Mode Variable Structure Control[D]. Jinan: Shandong University, 2009.
- [9] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990: 14-18.  
Gao Weibing. Variable Structure Control Theory[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 1990: 14-18.

(责任编辑: 邓光辉)