

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.02.002

双模激发纠缠相干态研究

许 兰, 吴桂平

(湖南第一师范学院 数理系, 湖南 长沙 410205)

摘 要: 基于双模纠缠相干态通过光子激发提出一种连续变量的纠缠相干态, 即双模激发纠缠相干态。简要介绍了如何通过激光与原子的相互作用来制备双模激发纠缠相干态, 并着重研究了双模激发纠缠相干态的保真度, 分析了激发光子数对其保真度的影响。

关键词: 激发纠缠相干态; 保真度; 光子激发

中图分类号: O431.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2012)02-0006-04

Study on Double-Mode Excited Entangled Coherent States

Xu Lan, Wu Guiping

(Department of Mathematics and Science, Hunan First Normal University, Changsha 410205, China)

Abstract: Based on double-mode entangled coherent states resulting from photon excitations, proposes continuous-variable-type entangled coherent states, called double-mode excited entangled coherent states. Introduces briefly the preparation of double-mode excited entangled coherent states by means of interactions of laser and atoms, and focuses on the study of the states fidelity and the influences of photon excitations on the fidelity.

Keywords: excited entangled coherent states; fidelity; photon excitations

0 引言

在量子信息学中, 纠缠态占据非常重要的地位, 纠缠态特殊的物理性质, 使量子信息具有经典信息所没有的许多新特征, 同时, 纠缠态也为信息传输和信息处理提供了新的物理资源。最近 10 年, 量子纠缠已经成为了量子力学中许多基础工作的中心, 特别是与量子不可分性、Bell 不等式的违背、EPR 佯谬等相关问题的研究密不可分。除了这些基础方面, 激发和操纵纠缠态对量子信息的应用也非常重要, 同时, 在量子计算^[1-2]、量子隐形传输^[3-4]、量子密集

编码^[5-6]、量子克隆^[7]、量子时钟同步^[8]中, 量子纠缠被认为是较重要的量子信息源。

纠缠相干态是实现连续变量量子信息处理的纠缠态之一。近年来, 连续变量纠缠态的量子特性及其在量子信息处理中的应用已经引起了相关研究人员广泛地关注^[9-18], 人们提出了许多利用分束器制备各种连续变量纠缠态的方案。如: M.G.A.Paris^[19]提出了利用 M-Z 干涉仪制备一个类似双模真空压缩态的纠缠态; B.C.Sanders^[20]利用非线性 M-Z 干涉仪制备了纠缠相干态; Zhou L. 等人^[16]提出了利用光学方法制备纠缠压缩真空态的方案。各种纠缠态的制备

收稿日期: 2011-01-13

基金项目: 湖南省教育厅科研基金资助项目(11C0287)

作者简介: 许 兰(1982-), 女, 湖南岳阳人, 湖南第一师范学院教师, 湖南师范大学博士生, 主要研究方向为量子信息, E-mail: xulanemail@126.com

在不同的物理系统中还有不同的实现方法。

在之前的工作中^[21], 研究者介绍了一种新的连续变量的纠缠纯态, 将它称之为单模激发纠缠相干态。本文介绍另一种新的连续变量的纠缠相干态, 将它称之为双模激发纠缠相干态, 并对这种量子态的形式和保真度及如何用三能级 Λ 型系统来制备双模激发纠缠相干态等问题进行研究。

1 双模激发纠缠相干态

首先给出纠缠态的形式, 从式(1)所示的双模纠缠相干态开始, 即

$$|\Psi_0\rangle = N_0(|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle), (m=0, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

式中: $|\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$, $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ 。

相干态一般用平移算符 $D(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ 作用在真空态 $|0\rangle$ 上来定义, 则归一化常数为

$$N_0^{-2} = 2[1 + \exp(-2(\alpha^2 + \beta^2))]. \quad (2)$$

为方便起见, 把式(1)中给出的双模纠缠相干态的第一个模和第二个模分别表示 a 模和 b 模, 则可以用 m 个光子来分别激发双模纠缠相干态的 a 模和 b 模, 这个态就叫做双模激发纠缠相干态, 定义为

$$|\Psi_m\rangle = N_m(a^\dagger - ib^\dagger)^m (|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle), \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

当 $m=1$ 时, 双模激发纠缠相干态 $|\Psi_1\rangle$ 为

$$|\Psi_1\rangle = N_1(a^\dagger - ib^\dagger)(|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle), \quad (4)$$

其归一化常数为

$$N_1^{-2} = 2[(2 + \alpha^2 + \beta^2) + (2 - \alpha^2 - \beta^2) \exp(-2(\alpha^2 + \beta^2))]. \quad (5)$$

当 $m=2$ 时, 双模激发纠缠相干态 $|\Psi_2\rangle$ 为

$$|\Psi_2\rangle = N_2(a^\dagger - ib^\dagger)^2 (|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle), \quad (6)$$

其归一化常数为

$$N_2^{-2} = 2[(8 + \alpha^4 + \beta^4 + 8\alpha^2 + 8\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2) + (8 + \alpha^4 + \beta^4 - 8\alpha^2 - 8\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2) \exp(-2(\alpha^2 + \beta^2))]. \quad (7)$$

同理可将 $|\Psi_3\rangle$, $|\Psi_4\rangle$, $|\Psi_5\rangle$, \dots 表示出来。

2 保真度

量子态的保真度是量子信息中常用的重要概念, 它表示信息在传输过程中保持原来状态的程度, 近

年来广泛应用于量子通信、量子计算机和量子密码技术中^[5,12]。本文主要研究双模激发纠缠相干态激发光子数 m 的变化对其保真度的影响。

为了描述量子信息在传输过程中不失真的程度, 人们将保真度^[22]定义为

$$F(\rho_1, \rho_2) = [\text{Tr}(\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_1})^{1/2}]^2, \quad (8)$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 分别为初态和末态所对应的密度算符。

保真度也可写成如下形式

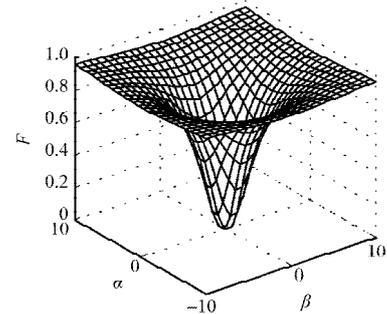
$$F(\alpha, \beta, m) = |\langle \Psi_0 | \Psi_m \rangle|^2, \quad (9)$$

式中 $0 \leq F \leq 1$ 。 $F=1$ 时, 表示量子信息在传输过程中不失真, 即初态和末态相同; $F=0$ 时, 表示量子信息在传输过程中完全失真, 即初态和末态正交。

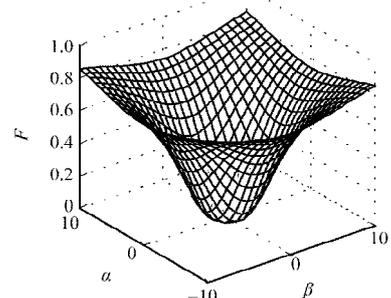
笔者通过计算得到了一些有趣的结果, 即当激发光子数 $m=1, 3, 5, \dots$ 为奇数时, 保真度 $F=0$, 说明这一系列的量子态在传输过程中完全失真, 即 $|\Psi_0\rangle$ 与 $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_3\rangle$, $|\Psi_5\rangle, \dots$ 等量子态正交。而当激发光子数 $m=2, 4, 6, \dots$ 为偶数时, 相应量子态的保真度 F 则为如下形式

$$F = 4|N_0|^2 |N_m|^2 (\alpha^2 + \beta^2)^m [1 + \exp(-2(\alpha^2 + \beta^2))]. \quad (10)$$

为了更直观地表示出 $|\Psi_2\rangle$, $|\Psi_4\rangle$, $|\Psi_6\rangle, \dots$ 等这一系列量子态在传输过程中保持原来状态的程度, 笔者给出了双模激发纠缠相干态的激发光子数 m 不同时, 其保真度 F 随参数 α 和 β 变化的三维图象, 结果如图 1 所示。



a) $m=2$



b) $m=4$

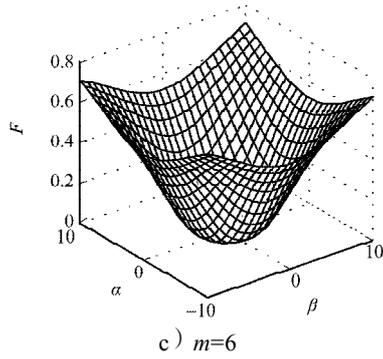


图1 保真度 F 随 α 和 β 的变化

Fig. 1 The fidelity F varying with α and β

同时, 当 $\alpha = \beta$ 时, 即激发双模纠缠相干态的 a 模和 b 模相等, 可将 $m = 2, 4, 6, \dots$ 为偶数时量子态的保真度 F 简化成

$$F = 2^{m+2} |N_0|^2 |N_m|^2 \alpha^{2m} [1 + \exp(-4\alpha^2)]^2, \quad (11)$$

为了更简洁地描述激发光子数 m 对 $|\Psi_2\rangle, |\Psi_4\rangle, |\Psi_6\rangle, \dots$ 等量子态保真度 F 的影响, 笔者给出了 $\alpha = \beta$ 时, 保真度 F 随 α 变化的二维图象, 如图2所示。

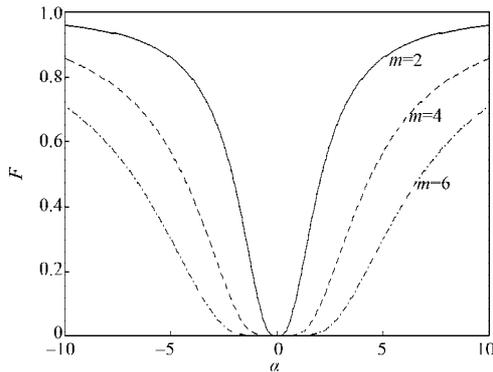


图2 保真度 F 随 α ($\alpha = \beta$) 的变化

Fig. 2 The fidelity F varying with α ($\alpha = \beta$)

从图1和图2可知, 随着激发光子数 m 的增大, 量子态出现完全失真的区域会增大, 而对于同一 α 值, 随着激发光子数 m 的增大, 保真度 F 的值则会减小。

3 双模激发纠缠相干态的制备

通过分析, 笔者提出了一种制备双模激发纠缠相干态的方案, 即通过文献[23-24]中量子态变形简化的方法来制备。我们可以把制备双模激发纠缠相干态的量子系统看成图3所示的三能级 Λ 型2个循环极化场中相互作用的谐振子, 其相互作用的哈密顿量为

$$H \propto |1\rangle\langle 3|(\hat{a} + i\hat{b}) + |3\rangle\langle 1|(\hat{a}^+ - i\hat{b}^+) + |1\rangle\langle 2|(\hat{a} - i\hat{b}) + |2\rangle\langle 1|(\hat{a}^+ + i\hat{b}^+). \quad (12)$$

实验时, 先制备纠缠相干态 $|\Psi\rangle$, 再结合式(12)中的哈密顿量进行条件测量, 即如果在量子态 $|3\rangle$ 上探测到光子, 时间很短时做一阶微扰, 那么场中的量子态为 $(\hat{a}^+ - i\hat{b}^+) |\Psi\rangle$ 。如果在量子态上探测到一系列的 m 个光子, 则场中的量子态就可以简化为 $(\hat{a}^+ - i\hat{b}^+)^m |\Psi\rangle$, 这就是所需要制备的双模激发纠缠相干态。

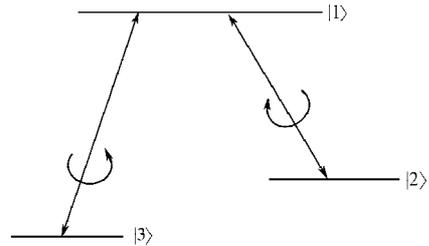


图3 制备双模激发纠缠相干态的三能级 Λ 系统

Fig. 3 A three-level Λ system for preparing double-mode excited entangled coherent states

4 结语

本文介绍了一种新的连续变量纠缠相干态, 将它称之为双模激发纠缠相干态, 其具体表达形式为 $|\Psi_m\rangle = N_m (\hat{a}^+ - i\hat{b}^+)^m (|\alpha, \beta\rangle + |-\alpha, -\beta\rangle), m = (0, 1, 2, \dots)$ 。本文主要研究了这种量子态的形式和保真度, 通过计算发现, 当激发光子数 $m = 1, 3, 5, \dots$ 为奇数时, 保真度 $F = 0$, 说明这一系列的量子态在传输过程中完全失真, 即 $|\Psi_0\rangle$ 与 $|\Psi_1\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_5\rangle, \dots$ 等量子态正交。而当激发光子数为偶数时, 随着激发光子数 m 的增大, 量子态出现完全失真的区域会增大, 同时对于同一 α 值, 随着激发光子数 m 的增大, 量子态保真度 F 的值会减小, 说明光子激发没有使保真度得到优化。最后, 笔者采用三能级 Λ 型系统, 用 G. S. Agarwal 制备涡旋态的方法, 制备了文中提出的双模激发纠缠相干态。

参考文献:

- [1] DiVincenzo D P, Quantum Computation[J]. Science, 1995, 270(10): 255-261.
- [2] Grover L K, Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack[J]. Phys. Rev. Lett., 1996, 79(2): 325-328.
- [3] Bennett C H. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels[J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(13): 1895-1899.
- [4] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental

- Quantum Teleportation[J]. Nature: London, 1997, 390(3): 575-579.
- [5] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via One-and Two-Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States [J]. Phys. Rev. Lett., 1992, 69(20): 2881-2884.
- [6] Mattle K, Weinfurter H, Kwiat P G, et al. Dense Coding in Experimental Quantum Communication[J]. Phys. Rev. Lett., 1996, 76(25): 4656-4659.
- [7] Bennett C H, Brassard G, Mermin N D. Quantum Cryptography without Bell's Theorem[J]. Phys. Rev. Lett., 1992, 68(5): 557-559.
- [8] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L. Positioning and Clock Synchronization through Entanglement[J]. Phys. Rev. A, 2002, 65(2): 022309.
- [9] Jeong H, Kim M S. Efficient Quantum Computation Using Coherent States[J]. Phys. Rev. A, 2002, 65(4): 042305.
- [10] Furusawa A. Unconditional Quantum Teleportation[J]. Science, 1998, 282(4): 706-709.
- [11] Zhou L, Kuang L M. Linear Optical Implementation for Quantum Teleportation of Unknown Two-Qubit Entangled States[J]. Chin. Phys. Lett., 2004, 21(11): 2101-2104.
- [12] Braunstein S L, Kimble H J. Teleportation of Continuous Quantum Variables[J]. Phys. Rev. Lett., 1998, 80(4): 869-872.
- [14] Zhou L, Kuang L M. Proposal for Optically Realizing a Quantum Game[J]. Phys. Lett. A, 2003, 315(6): 426-430.
- [15] Zhou L, Kuang L M. Linear Optics Implementation for Quantum Game with Two Players[J]. Phys. Lett. A, 2004, 330(1): 48-53.
- [16] Zhou L, Kuang L M. Optical Preparation of Entangled Squeezing Vacuum States[J]. Phys. Lett. A, 2002, 302(5): 273-279.
- [17] Guo Y, Kuang L M. Generation of High-Dimensional Photon Entangled Coherent States in Double Electromagnetically Induced Transparency System[J]. Chin. Phys. Lett., 2005, 22(3): 595-598.
- [18] Zeng A H, Kuang L M. Influence of Quantum Entanglement on Quantum Tunnelling between Two Atomic Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Lett. A, 2005, 338(3): 323-331.
- [19] Paris M G A. Entanglement and Visibility at the Output of a Mach-Zehnder Interferometer[J]. Phys. Rev. A, 1999, 59(2): 1615-1621.
- [20] Sanders B C. Entangled Coherent States[J]. Phys. Rev. A, 1992, 45(9): 6811-6815.
- [21] Xu L, Kuang L M. Single-Mode Excited Entangled Coherent States[J]. J. Phys. A: Math. Gen., 2006, 39: 191-198.
- [22] Jozsa R. Fidelity for the Mixed Quantum States[J]. Journal of Modern Optics, 1994, 41(12): 2315-2323.
- [23] Agarwal G S, Graf M, Orszag M, et al. State Preparation via Quantum Coherence and Continuous Measurement[J]. Phys. Rev. A, 1994, 49(5): 4077-4084.
- [24] Brune M, Haroche S, Raimond J M, et al. Manipulation of Photons in a Cavity by Dispersive Atom-Field Coupling: Quantum-Nondemolition Measurements and Generation of "Schrödinger Cat" States[J]. Phys. Rev. A, 1992, 45(7): 5193-5214.

(责任编辑: 李玉珍)