第26卷 第2期
2012年3月

湖　南　工　业　大　学　学　报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.26 No.2
Mar. 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.02.001

一类 n 阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性

周小奇，廖丽媛，杨远宏

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：对一类 n 阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性进行了研究，得到了方程的非振动解与其各阶导数的符号关系，以及振动性与渐近性的判别准则，并举例说明了准则的有效性。

关键词：脉冲；时滞；微分方程；振动性；渐近性

中图分类号：O175.14　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)02-0001-05

Oscillatory and Asymptotic Properties of a n-Order Delay Differential Equation with Impulses

Zhou Xiaoqi，Liao Liyuan，Yang Yuanhong

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：The oscillatory and asymptotic properties of n-order delay differential equations with impulses are investigated. The sign relations between the non-oscillatory solutions and all order derivatives for the equations are obtained, and the criteria on the properties are acquired. An example is given to demonstrate the effectiveness of the criteria.

Keywords：impulse；delay；differential equation；oscillation；asymptotic property

0　引言

具有“瞬间突变”特性的客观现象通常称为脉冲现象。脉冲现象在现代科学领域的实际问题中普遍存在，如电流中的电脉冲与飞船飞行中的脉冲控制，其数学模型可归结为脉冲微分方程。由于这一特性，它比不带脉冲的微分方程能更精确反映事物变化的规律[1]，因此引起了许多学者的关注[2-11]。文献[4]讨论了一类带强迫项的二阶脉冲时滞微分方程的振动性；文献[5]研究了带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性；文献[6]讨论了带阻尼项的四阶脉冲微分方程的振动性；文献[7]讨论了一类脉冲时滞微分方程的振动性；文献[8]研究了一类 n 阶脉冲常微分方程解的振动性与渐近性；文献[9]讨论了带强迫项的 n 阶脉冲微分方程的振动性与渐进性。受其启发，笔者利用迭代法与分析法对一类 n 阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性进行研究，得到了它的两个判别准则，并举例说明了准则的有效性。

n 阶脉冲时滞微分方程形式如下：

$$\begin{cases} x^{(n)}(t)+p(t)x(t)+q(t)x(t-\tau)=0 \\ \qquad (t>t_0,\ t\neq t_k,\ k\in\mathbf{N}); \\ x\left(t_k^+\right)=a_{0k}x\left(t_k\right),\ x^{(i)}\left(t_k^+\right)=a_{ik}x^{(i)}\left(t_k^-\right) \\ \qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n-1); \\ x=\varphi(t)\quad \left(t\in\left[t_0-\tau,\ t_0\right]\right)。 \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2012-01-03

基金项目：湖南省教育厅教学改革基金资助项目（湘教通[2009]321号）

作者简介：周小奇(1961-)，女，湖南长沙人，湖南工业大学副教授，硕士，主要从事高等数学和微分方程的教学与研究，E-mail：532045219@qq.com

式中：$0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$；

$0 < \tau \leqslant t_{k+1} - t_k < +\infty$；

$\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = +\infty$（$k \in \mathbf{N}$）；

$\alpha_{ik} > 0$（i=0, 1, …, n−1），并且$\alpha_{0k} \neq 1$（$k \in \mathbf{N}$）；

$p, q \in \mathrm{PC}\{[t_0, +\infty), \mathbf{R}^+\}$，且当$k$充分大时

$p(t), q(t) \not\equiv 0 \ \left(t \in (t_k, t_{k+1}]\right)$；

$\varphi \in \mathrm{C}\{[t_0 - \tau, t_0], \mathbf{R}\}$，且当$t \in (t_0 - \tau, t_0)$时$\varphi^{(n)}(t)$几乎处处（a.e.）存在，同时它的间断点是第一类的，个数至多可数。

1 主要结论

引理1 设方程（1）适合条件

H） $x \in \mathrm{C}^{n-1}\{(t_k, t_{k+1}), \mathbf{R}\}$ $(k \in \mathbf{N})$的任意有界解为$x(t)$。如果$T \geqslant t_0$，当$t \geqslant T$时，$x(t-\tau) > 0(<0)$，并且还满足：

Ⅰ） $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \dfrac{a_{i\,s+1} a_{i\,s+2} \cdots a_{i\,s+m}}{a_{i-1\,s+1} a_{i-1\,s+2} \cdots a_{i-1\,s+m}} \left(t_{s+m+1} - t_{s+m}\right) = +\infty$，$s \in \mathbf{N}, i = 1, 2, \cdots, n-1$；

Ⅱ） $\varliminf\limits_{m \to +\infty} a_{01} a_{02} \cdots a_{0m} > 0$（当$n$=2时，不需要此条件）。

则存在$T_0 \geqslant T$，当$t_k \geqslant T_0$, $t \in (t_k, t_{k+1})$时，$(-1)^j x^{(n-j)}\left(t_k^-\right) > 0\ (<0)$, $(-1)^j x^{(n-j)}(t) < 0 (>0)$，$k \in \mathbf{N}$，$j$=1, 2, …, n−1，成立。

证明 仅证明括号外的情形。

存在$T_1 \geqslant T$，当$t_k \geqslant T_1$, $t \in (t_k, t_{k+1})$时，有$x^{(n-1)}\left(t_k^-\right) \geqslant 0$；

反之有$t_{s_1} \geqslant T_1$, $x^{(n-1)}\left(t_{s_1}^-\right) < 0$；

从而有$x^{(n-1)}\left(t_{s_1}^+\right) = a_{n-1\,s_1} x^{(n-1)}\left(t_{s_1}^-\right) < 0$。

记$x^{(n-1)}\left(t_{s_1}^+\right) = -\alpha_1$，则$\alpha_1 > 0$。

根据

$$p(t), q(t) \geqslant 0, x(t), x(t-\tau) > 0 \ (t > T),$$
$$x^{(n)}(t) = -p(t)x(t) - q(t)x(t-\tau) \ \text{(a.e.)},$$

可得

$$x^{(n)}(t) \leqslant 0 \left(t \in \left(t_{s_1+l-1}, t_{s_1+l}\right), l \in \mathbf{N}\right) \quad \text{(a.e.)}.$$

接下来的证明参见文献[8]引理1（略）。因此，定理结论成立。

引理2[10] 设$x \in \mathrm{C}\{(t_k, t_{k+1}], \mathbf{R}\}$ $(k \in \mathbf{N})$，并且$\lim\limits_{t \to t_k^+} x(t)$存在。如果

Ⅰ）有$\bar{t} \in \mathbf{R}^+$，使得$x(t) > 0\ (<0)\ (t \geqslant \bar{t})$；

Ⅱ）有$m \in \mathbf{N}$，使得$x(t)$在$(t_k, t_{k+1}]$$(k \geqslant m)$上单调不增（不减）；

Ⅲ）$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left[x\left(t_k^+\right) - x\left(t_k\right)\right]$收敛。

那么$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = r$，且常数$r \geqslant 0$（$\leqslant 0$）。

与引理2类似可得引理3。

引理3 设$x \in \mathrm{C}\{(t_k, t_{k+1}], \mathbf{R}\}$ $(k \in \mathbf{N})$，并且是有界函数。如果

Ⅰ）有$\bar{t} \in \mathbf{R}^+$，使得$x(t) > 0 \left(t \geqslant \bar{t}\right)$；

Ⅱ）有$m \in \mathbf{N}$，使得$x(t)$在$(t_k, t_{k+1}]$$(k \geqslant m)$上单调不增；

Ⅲ）$x\left(t_k^+\right) = a_{0k} x\left(t_k\right) \left(0 < a_{0k} < 1, k \in \mathbf{N}\right)$。

那么$\lim\limits_{t \to t_k^+} x(t) = r$，且常数$r \geqslant 0$。

定理1 如果引理1的条件H），Ⅰ）和Ⅱ）都满足，且$0 < a_{ik} \leqslant 1$（$k \in \mathbf{N}$, i=1, 2, …, n−1）。

1）当n为偶数时，若还有$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|a_{0k} - 1\right|$收敛或$a_{0k} > 1$（$k \in \mathbf{N}$），并且$\int^{+\infty} t^{n-1} p(t) \mathrm{d}t = +\infty$或$\int^{+\infty} t^{n-1} q(t) \mathrm{d}t = +\infty$，那么方程（1）的任意有界解振动；

2）当n为奇数时，若还有$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|a_{0k} - 1\right|$收敛或$0 < a_{0k} < 1$（$k \in \mathbf{N}$），并且$\int^{+\infty} t^{n-1} p(t) \mathrm{d}t = +\infty$或$\int^{+\infty} t^{n-1} q(t) \mathrm{d}t = +\infty$，那么方程（1）的任意有界解最终定号趋于零或者振动。

证明 设$x(t)$为方程（1）的一个非振动有界解，不妨设存在$T > t_0$，当$t > T$时，有$x(t-\tau) > 0$，当然有$x(t) > 0$。

由引理1知，存在$T_0 \geqslant T$，当$t_k \geqslant T_0$, $t \in (t_k, t_{k+1})$时，有

$$(-1)^j x^{(n-j)}\left(t_k^-\right) < 0,\ (-1)^j x^{(n-j)}\left(t_k\right) < 0,$$
$$(k \in \mathbf{N},\ j = 1, 2, \cdots, n-1).$$

记$s = \min\limits_{t_k \geqslant T_0} t_k$。下面分2种情形证明。

情形1：n为偶数。

Ⅰ）因$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|a_{0k} - 1\right|$收敛，由$x'\left(t_k^-\right) > 0$, $x'(t) > 0$ $\left(t \in (t_k, t_{k+1})\right)$，得

$$\begin{cases} x(t) > x\left(t_s^+\right) = a_{0s} x\left(t_s\right), t \in \left(t_s, t_{s+1}\right), \\ x\left(t_{s+1}\right) > a_{0s} x\left(t_s\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) > x\left(t_{s+1}^+\right) = a_{0\,s+1} x\left(t_{s+1}\right) > a_{0\,s+1} a_{0\,s} x\left(t_s\right), t \in \left(t_{s+1}, t_{s+2}\right), \\ x\left(t_{s+2}\right) > a_{0\,s+1} a_{0\,s} x\left(t_s\right); \end{cases}$$

$$\vdots$$

归纳可得，对$l \geqslant 0$有

$$\begin{cases} x(t) > a_{0\,s+l-1}\cdots a_{0\,s+1}a_{0\,s}x(t_s), t\in(t_{s+l-1}, t_{s+l}); \\ x(t_{s+l}) > a_{0\,s+l-1}\cdots a_{0\,s+1}a_{0\,s}x(t_s)。\end{cases} \tag{2}$$

当$l\geqslant 2$时，由$t_{s+l-1}-t_{s+l-2}\geqslant\tau$得

$$t_{s+l-1}-\tau\geqslant t_{s+l-2},$$

$$t_{s+l-2}\leqslant t_{s+l-1}-\tau<t-\tau<t<t_{s+l},$$

即有

$$t-\tau\in(t_{s+l-2}, t_{s+l-1}]\cup(t_{s+l-1}, t_{s+l})。\tag{3}$$

记

$$M_s^l=\min\{a_{0\,s}a_{0\,s+1}\cdots a_{0\,s+l-2},\ a_{0\,s}a_{0\,s+1}\cdots a_{0\,s+l-1}\},$$

$$M_{sl}=\min\{M_s^2, M_s^3, \cdots, M_s^l\},$$

再由式（2）式得

$$x^{(n-1)}(t)=-p(t)x(t)+q(t)x(t-\tau)\leqslant -q(t)x(t-\tau)<-M_s^l x(t_s)q(t) \quad (t\in(t_{s+l}, t_{s+l+1}))\ \ (\text{a.e.})。\tag{4}$$

将式（4）两边同乘以t^{n-1}，再从t_{s+1}到t_{s+l}积分得

$$\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t\leqslant -M_{s\,l}x(t_s)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t。\tag{5}$$

而且

$$\begin{aligned}&\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}} t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t=\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}} t^{n-1}\mathrm{d}x^{(n-1)}(t)=\\ &t^{n-1}x^{(n-1)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-(n-1)\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}} t^{n-2}x^{(n-1)}(t)\mathrm{d}t=\\ &t^{n-1}x^{(n-1)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-(n-1)t^{n-2}x^{(n-2)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}+\\ &(n-1)(n-2)\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}} t^{n-3}x^{(n-2)}(t)\mathrm{d}t=\\ &\qquad\vdots\\ &t^{n-1}x^{(n-1)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-(n-1)t^{n-2}x^{(n-2)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}+\\ &(n-1)(n-2)t^{n-3}x^{(n-3)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}-\cdots+\\ &(-1)^{j-1}(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)t^{n-j}x^{(n-j)}(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}+\cdots-\\ &(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot x(t)\Big|_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}=\\ &-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}\left[t_{s+m+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m+1}^-)-t_{s+m}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m}^+)\right]=\\ &-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}\left[t_{s+m+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m+1}^-)-\right.\\ &\left.a_{n-j\,s+m}t_{s+m}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m}^-)\right]\ (m=1,\ 2,\cdots,\ l-1)。\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{l-1}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}} t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t=\\ &\sum_{m=1}^{l-1}\left\{-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}\left[t_{s+m+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m+1}^-)-\right.\right.\\ &\left.\left.a_{n-j\,s+m}t_{s+m}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m}^-)\right]\right\}=\\ &-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}\left\{\sum_{m=1}^{l-1}\left[t_{s+m+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m+1}^-)-\right.\right.\\ &\left.\left.a_{n-j\,s+m}t_{s+m}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m}^-)\right]\right\}=\\ &-\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}\left[t_{s+l}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+l}^-)+\right.\\ &\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{n-j\,s+m})t_{s+m}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+m}^-)-\\ &\left.a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)\right]=\\ &\sum_{j=1}^{n-1}A_{n-1}^{j-1}t_{s+l}^{n-j}\left[-(-1)^j x^{(n-j)}(t_{s+l}^-)\right]+\\ &\sum_{m=2}^{l-1}\sum_{j=1}^{n-1}A_{n-1}^{j-1}(1-a_{n-j\,s+m})t_{s+m}^{n-j}\left[-(-1)^j x^{(n-j)}(t_{s+m}^-)\right]-\\ &A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)-\\ &A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})。\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}&-A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)-\\ &A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\\ &\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{6}$$

由式（5）和（6）得

$$\begin{aligned}&-A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)-\\ &A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<-M_{sl}x(t_s)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{7}$$

同理可得

$$\begin{aligned}&-A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)-\\ &A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\\ &-M_{sl}x(t_s)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}p(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{8}$$

Ⅱ）因$a_{0k}>1$，与Ⅰ）同理可得

$$\begin{aligned}&-A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)<\\ &-M_{sl}x(t_s)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t;\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&-A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j A_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)<\\ &-M_{sl}x(t_s)\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}} t^{n-1}p(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\tag{10}$$

在式（7）或式（8）中，由$\int^{+\infty} t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t=+\infty$或$\int^{+\infty} t^{n-1}p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，且$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|x(t_k)$收敛，引理1的条件Ⅱ）及$x(t_s)>0$，得$\lim_{l\to+\infty}x(t_{s+l})=+\infty$；或在式（9）或式（10）中，同理可得$\lim_{l\to+\infty}x(t_{s+l})=+\infty$。这与有界相矛盾，因此结论1）成立。

情形2：n为奇数。

根据引理1得$x(t)$在$t\in(t_k,t_{k+1}]\,(t_k\geqslant T_0)$上严格递减，如果$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$收敛，则

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|x(t_k^+)-x(t_k)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|x(t_k)$$

收敛。

从引理2得$\lim_{t\to+\infty}x(t)=r\ (0\leqslant r<+\infty)$。

如果$0<a_{0k}<1$，从引理3得

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=r\ (0\leqslant r<+\infty),$$

从而有

$$\lim_{t\to+\infty}x(t-\tau)=r\ (0\leqslant r<+\infty)。$$

再证r=0。

如果r>0，也就有$T_1>T_0$，使得当$t_k\geqslant T_1$，$t\in(t_k,t_{k+1}]$时，

$$x(t-\tau)>\frac{r}{2}。$$

记$s=\min_{t_k\geqslant T_1}k$，从而由式（1）得

$$\begin{aligned}&x^{(n)}(t)=-p(t)x(t)-q(t)x(t-\tau)\leqslant\\&-q(t)x(t-\tau)<-\frac{r}{2}q(t)\\&\left(t\in(t_{s+l-1},t_{s+l}],\ l\in\mathbf{N}\right)\ (\text{a.e.})。\end{aligned}\quad(11)$$

式（11）两边同乘以t^{n-1}，再从t_{s+1}到t_{s+l}积分得

$$\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t\leqslant-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t。\quad(12)$$

Ⅰ）因$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|$收敛，类似于式（6）的由来得

$$\begin{aligned}&A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})-\sum_{j=1}^{n}(-1)^jA_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)+\\&A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}x^{(n)}(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\quad(13)$$

由式（12）和（13）可得

$$\begin{aligned}&A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})-\sum_{j=1}^{n}(-1)^jA_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)+\\&A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\\&-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\quad(14)$$

同理可得

$$\begin{aligned}&A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})-\sum_{j=1}^{n}(-1)^jA_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)+\\&A_{n-1}^{n-1}\sum_{m=2}^{l-1}(1-a_{0\,s+m})x(t_{s+m})<\\&-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}p(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\quad(15)$$

Ⅱ）因$0<a_{0k}<1$，与Ⅰ）同理可得

$$\begin{aligned}&A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})-\sum_{j=1}^{n}(-1)^jA_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)<\\&-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t；\end{aligned}\quad(16)$$

$$\begin{aligned}&A_{n-1}^{n-1}x(t_{s+l})-\sum_{j=1}^{n}(-1)^jA_{n-1}^{j-1}a_{n-j\,s+1}t_{s+1}^{n-j}x^{(n-j)}(t_{s+1}^-)<\\&-\frac{r}{2}\int_{t_{s+1}}^{t_{s+l}}t^{n-1}p(t)\mathrm{d}t。\end{aligned}\quad(17)$$

在式（14）或（15）中，由$\int^{+\infty}t^{n-1}q(t)\mathrm{d}t=+\infty$或$\int^{+\infty}t^{n-1}p(t)\mathrm{d}t=+\infty$，且$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_{0k}-1|x(t_k)$收敛，得$\lim_{l\to+\infty}x(t_{s+l})=-\infty$；在式（16)或（17）中，同理可得$\lim_{l\to+\infty}x(t_{s+l})=-\infty$。这与$x(t)$有界相矛盾，从而$r$=0，因此结论2）成立，

定理2 如果引理1的条件H)，Ⅰ）和Ⅱ）都满足，并且n为偶数；记$e_k=\max\left\{1,\dfrac{1}{a_{0k}}\right\}\ (k\in\mathbf{N})$，还满足条件Ⅲ）或Ⅳ）：

Ⅲ）$\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{n-1\,s+1}a_{n-1\,s+2}\cdots a_{n-1\,s+m}}e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=+\infty,s\in\mathbf{N}$；

Ⅳ）$\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0\,s+1}a_{0\,s+2}\cdots a_{0\,s+m}}{a_{n-1\,s+1}a_{n-1\,s+2}\cdots a_{n-1\,s+m}}e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}p(t)\mathrm{d}t=+\infty,s\in\mathbf{N}$；

那么方程（1）的任意有界解振动。

证明与定理1类似（略）。

2 应用举例

例1 讨论如下方程的解：

$$\begin{cases} x^{(8)}(t)+p(t)x(t)+q(t)x(t-\pi)=0 \\ \quad (t>t_0=\pi, t\neq 2k\pi, k\in \mathbf{N}); \\ x\left(t_k^+\right)=a_{0k}x\left(t_k\right),\ x^{(i)}\left(t_k^+\right)=a_{ik}x^{(i)}\left(t_k^-\right) \\ \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,7); \\ x=\varphi(t) \quad (t\in[0,\ 2\pi])。 \end{cases} \tag{18}$$

式中：$t_k=2k\pi$；

$$a_{ik}=\left(1+\frac{1}{k}\right)\bigg/\left(1+\frac{1}{k+1}\right);$$

$$p(t)=1;$$

$$q(t)=\begin{cases} 2, & t\in(2n\pi-\pi,\ 2n\pi], \\ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\bigg/\left(1+\frac{1}{n+1}\right), & t\in(2n\pi,\ 2n\pi+\pi], \end{cases} \quad n\in\mathbf{N}。$$

解　显然方程（18）满足引理1的所有条件，且

$$e_k=\max\left\{1,\frac{1}{a_{0k}}\right\} \quad (k\in\mathbf{N})。$$

而

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{a_{0s+1}a_{0s+2}\cdots a_{0s+m}}{a_{7s+1}a_{7s+2}\cdots a_{7s+m}}e_{s+m}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=$$
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{t_{s+m}}^{t_{s+m+1}}q(t)\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{2(s+m)\pi}^{2(s+m+1)\pi}q(t)\mathrm{d}t\geqslant$$
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{2(s+m)\pi+\pi}^{2(s+m+1)\pi}2\mathrm{d}t=\sum_{m=1}^{+\infty}2\pi=+\infty,$$

即满足定理2的条件Ⅲ）。

这样定理2的条件都满足，因此方程（18）的任意有界解振动。

事实上

$$x(t)=\begin{cases} 1, & t=0; \\ \dfrac{2\cos t}{1+\frac{1}{n+1}}, & t\in(2n\pi,\ 2n\pi+2\pi],\ n\in\mathbf{N}。 \end{cases}$$

就是方程（18）的一个有界振动解，而且

$$\varphi(t)=\cos t \quad (t\in[0,\pi])。$$

参考文献：

[1] Lakshmikantham V，Bainov D D，Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore：World Scientific，1989：1-29.

[2] Chen Y S，Feng W Z. Oscillations of Second Order Nonlinear ODE with Impulses[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1997，210(1)：150-169.

[3] 汤德全，陈永劭. 带强迫项的脉冲时滞微分方程的振动性[J]. 数学杂志，2005，25(5)：549-552.
Tang Dequan，Chen Yongshao. Oscillations of Impulses Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. J. of Math (PRC)，2005，25(5)：549-552.

[4] 叶国炳，周小奇. 一类带强迫项的二阶脉冲时滞微分方程的振动性[J]. 数学理论与应用，2009，29(1)：37-40.
Ye Guobing，Zhou Xiaoqi. Oscillation of a Class Second Order Impulsive Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. Mathematical Theory and Applications，2009，29(1)：37-40.

[5] 叶国炳，周小奇. 带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(3)：22-25.
Ye Guobing，Zhou Xiaoqi. Oscillatory and Asymptotic Properties of Third Order Impulsive Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(3)：22-25.

[6] 刘礼玲，叶国炳. 带阻尼项的四阶脉冲微分方程的振动性. 湖南理工学院学报：自然科学版，2008，21(2)：11-13.
Liu Liling，Ye Guobing. Oscillatory Property of Fourth Order Impulsive Differential Equations with Damping Term [J]. Journal of Hunan Institute of Science and Technology：Natural Sciences，2008，21(2)：11-13.

[7] 王学斌. 一类脉冲时滞微分方程的振动性[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(6)：7-10.
Wang Xuebin. Oscillations of a Class of Impulsive Delay Differential Equations[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(6)：7-10.

[8] 陈福来，文贤章. n阶线性脉冲微分方程解的振动性[J]. 应用数学学报，2006，29(3)：527-541.
Chen Fulai，Wen Xianzhang. Oscillations of n-Order Linear Differential Equation with Impulses[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2006，29(3)：527-541.

[9] 叶国炳，申建华. 带强迫项的n阶脉冲微分方程的振动性与渐近性[J]. 系统科学与数学，2010，30(4)：501-514.
Ye Guobing，Shen Jianhua. Oscillation and Asymptotic Property of n-Order Impulsive Differential Equation with Forcing Term[J]. Journal of Systems Science and Mathmatical Sciences，2010，30(4)：501-514.

[10] 申建华，庾建设. 具有脉冲扰动的非线性时滞微分方程[J]. 应用数学，1996，9(3)：272-277.
Shen Jianhua，Yu Jianshe. On Nonlinear Delay Differential Equations with Impulsive Perturbations[J]. Matchematica Applicata，1996，9(3)：272-277.

[11] Gracf J R，Shen J H，Stavroulakis I P. Oscillation of Impulsive Neutral Delay Differential Equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2002，268 (1)：310-333.

（责任编辑：邓光辉）