第26卷第1期 湖南工业大学学报 Vol.26 No.1
2012年1月 Journal of Hunan University of Technology Jan. 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.01.002

工程设计中一类定积分的近似计算

李平乐

（娄底职业技术学院 机电工程系，湖南 娄底 417000）

摘　要：给出了定积分$\int_a^b \ln\sin x\mathrm{d}x$的2个不等式及其证明过程，并用来计算该定积分的近似值，通过举例对近似计算的方法作了说明。计算结果表明：该方法可获得较高的计算精度，并能确定误差大小；若将积分区间细分，可进一步提高计算精度。

关键词：积分不等式；近似计算；估算误差

中图分类号：O242　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)01-0006-04

The Approximate Computation for a Type of Definite Integration in Engineering Design

Li Pingle

（Department of Mechanical and Electrical Engineering，Loudi Vocational and Technical College，Loudi Hunan 417000，China）

Abstract：Introduces two inequalities of the definite integral $\int_a^b \ln\sin x\mathrm{d}x$ and its proof. Uses them to calculate its approximate value and illustrates the approximate computation through an example. The results show that the method is of higher precision and can determine the integral errors; if the integration interval subdivides, it will further improve the accuracy of calculation.

Keywords：integral inequalities；approximate calculation；estimation errors

定积分的近似计算方法主要有：矩形法、梯形法和抛物线法[1-2]。它们存在一个共同的缺陷：不能判断其近似值是大于精确值还是小于精确值。虽然有些不等式可用来估计定积分的值，但估算精度不高。文献[3-12]对一些用通常方法“无法积分”的定积分进行了研究，如$\int_a^b \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$, $\int_a^b \frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$, $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$等，得到了计算其近似值的不等式。在此基础上，笔者对积分$\int_a^b \ln\sin x\mathrm{d}x$，$0<a<b<\pi$进行了研究，得到了2个积分不等式，用来估算其近似值，并确定误差范围。

1　主要结果

根据函数$\sin x$的周期性，计算$\ln\sin x$，只需考虑$x\in(0,\pi)$，且$\ln\sin x\leqslant 0$。因为函数$f(x)=\ln\sin x$在区间$(0,\pi)$上连续，则$\int_a^b \ln\sin x\mathrm{d}x$，$0<a<b<\pi$存在，并有定理1。

定理1　当$0<a<b<\pi$时，有

收稿日期：2011-10-18

作者简介：李平乐（1955-），男，湖南涟源人，娄底职业技术学院高级讲师，主要研究方向为积分近似计算及误差确定在工程设计中的应用，E-mail：xielichun188@163.com

$$-\left\{[\arcsin(\sin b)-\arcsin(\sin a)]^2-\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\sin b\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 b\right)-\sin a\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 a\right)}+\right.$$

$$\left.\frac{\sin b-\sin a}{\left[\sin b\ln^2\sin b-\sin a\ln^2\sin a-2\sin b(\ln\sin b-1)+2\sin a(\ln\sin a-1)\right]^{-1}-(\sin b-\sin a)\left[\frac{1}{2}\ln^2\sin b-\frac{1}{2}\ln^2\sin a\right]^{-2}}\right\}^{\frac{1}{2}}<$$

$$\int_a^b\ln\sin x\mathrm{d}x<-\frac{1}{\sqrt{[\sin b(\ln\sin b-1)-\sin a(\ln\sin a-1)]^{-2}-\left(\frac{1}{2}\ln^2\sin b-\frac{1}{2}\ln^2\sin a\right)^{-2}}}。\qquad(1)$$

证　先证式（1）右半部分。

对$\int_a^b\ln\sin x\mathrm{d}x$，令 u=sin x，则

$$\int_a^b\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u。$$

由文献[3]得

$$\left|\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right|>\sqrt{\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x-\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{x^2}{\ln^2 x}\mathrm{d}x}}。\qquad(2)$$

由于$\frac{1}{\ln^2\sin x}>\frac{\sin^2 x}{\ln^2\sin x}$，

由文献[4]得

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x-\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{x^2}{\ln^2 x}\mathrm{d}x<\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}-\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right)^2}。\qquad(3)$$

又因为

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\ln x\mathrm{d}x=\sin b(\ln\sin b-1)-\sin a(\ln\sin a-1),\qquad(4)$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln^2\sin b-\ln^2\sin a\right]。\qquad(5)$$

综合上述结论，并将式（3）代入式（2）得

$$\int_a^b\ln\sin x\mathrm{d}x<-\frac{1}{\sqrt{[\sin b(\ln\sin b-1)-\sin a(\ln\sin a-1)]^{-2}-\left(\frac{1}{2}\ln^2\sin b-\frac{1}{2}\ln^2\sin a\right)^{-2}}}。$$

再证式（1）左半部分。

由文献[5]得

$$\left|\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right|<\sqrt{\sin b-\sin a}\cdot\sqrt{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln^2 x}{1-x^2}\mathrm{d}x}。\qquad(6)$$

由文献[6]得

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x>\left[(\sin b-\sin a)^{-\frac{1}{2}}\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right]^2,\qquad(7)$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}(1-x^2)\mathrm{d}x}。\qquad(8)$$

从而有

$$\left[(\sin b-\sin a)^{\frac{1}{2}-1}\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right]^2-\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}(1-x^2)\mathrm{d}x}>0。$$

由文献[5]得

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln^2 x}{1-x^2}\mathrm{d}x>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\mathrm{d}x}{\ln^2 x}-\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{x^2}{\ln^2 x}\mathrm{d}x},\qquad(9)$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\ln^2 x\mathrm{d}x},\qquad(10)$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{x^2}{\ln^2 x}\mathrm{d}x>\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right)^2},\qquad(11)$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{x^2}{\ln^2 x}\mathrm{d}x>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x}。\qquad(12)$$

由文献[6]得

$$\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right)^2}>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x},\qquad(13)$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x>\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\ln x\mathrm{d}x\right)^2},\tag{14}$$

$$\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\ln x\mathrm{d}x\right)^2}>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\ln^2 x\mathrm{d}x}。\tag{15}$$

由文献[4]得

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}x-\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{x^2}{\ln^2 x}\mathrm{d}x<\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\ln^2 x\mathrm{d}x}-\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x}。\tag{16}$$

由文献[5]得

$$\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\ln^2 x\mathrm{d}x}-\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x}>\frac{(\sin b-\sin a)^2}{\int_{\sin a}^{\sin b}\ln^2 x\mathrm{d}x}-\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\left(\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x\right)^2}。\tag{17}$$

而且

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin(\sin b)-\arcsin(\sin a),\tag{18}$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}(1-x^2)\mathrm{d}x=\sin b\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 b\right)-\sin a\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 a\right),\tag{19}$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\ln^2 x\mathrm{d}x=\sin b\ln^2\sin b-\sin a\ln^2\sin a-2\sin b(\ln\sin b-1)+2\sin a(\ln\sin a-1),\tag{20}$$

$$\int_{\sin a}^{\sin b}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2\sin b-\frac{1}{2}\ln^2\sin a。\tag{21}$$

综合上述结论，将式（17）代入式（16）得

$$\int_a^b\ln\sin x\mathrm{d}x>-\left\{[\arcsin(\sin b)-\arcsin(\sin a)]^2-\frac{(\sin b-\sin a)^3}{\sin b\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 b\right)-\sin a\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 a\right)}+\frac{\sin b-\sin a}{\left[\sin b\ln^2\sin b-\sin a\ln^2\sin a-2\sin b(\ln\sin b-1)+2\sin a(\ln\sin a-1)\right]^{-1}-(\sin b-\sin a)\left(\frac{1}{2}\ln^2\sin b-\frac{1}{2}\ln^2\sin a\right)^{-2}}\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

定理证毕。

2 计算实例

用定理1中的不等式可计算定积分$\int_b^a\ln\sin x\mathrm{d}x$的近似值，并估算出误差。

例1 计算$\int_1^3\ln\sin x\mathrm{d}x$。

解 由式（1）得

$$-\left\{[\arcsin(\sin 3)-\arcsin(\sin 1)]^2-\frac{(\sin 3-\sin 1)^3}{\sin 3\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 3\right)-\sin 1\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 1\right)}+\frac{\sin 3-\sin 1}{\left[\sin 3\ln^2\sin 3-\sin 1\ln^2\sin 1-2\sin 3(\ln\sin 3-1)+2\sin 1(\ln\sin 1-1)\right]^{-1}-(\sin 3-\sin 1)\left(\frac{1}{2}\ln^2\sin 3-\frac{1}{2}\ln^2\sin 1\right)^{-2}}\right\}^{\frac{1}{2}}<$$

$$\int_1^3\ln\sin x\mathrm{d}x<-\frac{1}{\sqrt{[\sin 3(\ln\sin 3-1)-\sin 1(\ln\sin 1-1)]^{-2}-\left(\frac{1}{2}\ln^2\sin 3-\frac{1}{2}\ln^2\sin 1\right)^{-2}}}。$$

计算结果为

$$-1.952\,512\,788<\int_1^3\ln\sin x\mathrm{d}x<-0.596\,598\,630,$$

估算误差为

$$-0.596\,598\,630-(-1.952\,512\,788)=1.355\,914\,158。\tag{22}$$

由于积分区间[1,3]较长，积分误差较大。现将积分区间分成4个小区间，区间端点依次为：

a_1=1，b_1=1.285 398 163；a_2=1.285 398 163，$b_2=\frac{\pi}{2}$；

$a_3=\frac{\pi}{2}$，b_3=2.285 398 163；a_4=2.285 398 163，b_4=3。

分别代入式（1），经计算得

$$\sum_{i=1}^{4}\int_{a_i}^{b_i}\ln\sin x\mathrm{d}x < -0.026\,995\,896-0.003\,586\,575-0.058\,853\,606-0.575\,031\,403=-0.664\,467\,485,$$

$$\sum_{i=1}^{4}\int_{a_i}^{b_i}\ln\sin x\mathrm{d}x > -0.093\,965\,246-0.201\,110\,546-0.519\,726\,150-0.666\,766\,745=-1.481\,565\,152,$$

即有

$$-1.481\,565\,152<\int_1^3\ln\sin x\mathrm{d}x<-0.664\,467\,485。$$

估算误差为

$$-0.664\,467\,485-(-1.481\,565\,152)=0.817\,097\,667。\quad（23）$$

比较式（22）和（23）可知，将积分$\int_1^3\ln\sin x\mathrm{d}x$区间[1,3]细分成 4 个小区间时，积分的估算误差减小，若将若区间进一步细分，积分的估算误差会更小。

3　结语

利用定理 1 不仅可估算出定积分$\int_a^b\ln\sin x\mathrm{d}x$的近似值，而且可确定误差范围。通过将积分区间细分可提高估算精度，特别是利用计算机进行数值计算，可把理论上称之为求近似值的问题实质上转化为求精确值，从而提高工程设计精度。

参考文献：

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，1988：278-290.
Teaching and Research Section of Mathematics of Tongji University. Higher Mathematics[M]. 3rd ed. Beijing：Higher Education Press，1988：278-290.

[2] 丁鹤龄. 高等数学[M]. 北京：高等教育出版社，1982：288-305.
Ding Heling. Higher Mathematics[M]. Beijing：Higher Education Press，1982：288-305.

[3] 李平乐. 关于一类积分的近似计算及误差确定的第三种论证方法[J]. 西北师范大学学报：自然科学版：科研与教学论文专辑，2008(41)：5-19.
Li Pingle. The Third Method for Demonstrating Approximate Computation and Error Estimation of a Type Integration [J]. Journal of Northwest Normal University：Natural Sciences：Thesis Collection of Research and Teaching，2008(41)：5-19.

[4] 李平乐. 新的积分不等式在工程设计中的应用[J]. 淮海工学院学报：自然科学版，2011，20(3)：6-10.
Li Pingle. Application of the New Integral Inequality to Engineering Design[J]. Journal of Huaihai Institute of Technology：Natural Science Edition，2011，20 (3)：6-10.

[5] 李平乐. 用积分不等式计算一类定积分的值[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(5)：37-41.
Li Pingle. Calculation of a Type of Definite Integration Value with Integral Inequalities[J]. Journal of Hunan University of Technology，2010，24(5)：37-41.

[6] 李平乐. 基于积分近似计算在工程设计领域的研究[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2008，29(6)：4-6.
Li Pingle. Study of Region of Engineering Design Based on Approximate Computation of Integration[J]. Journal of Jishou University：Natural Sciences Edition, 2008，29(6)：4-6.

[7] 李平乐. 基于积分近似计算在工程设计领域的研究[J]. 西北师范大学学报：自然科学版科：科研与教学论文专辑，2008(42)：8-11.
Li Pingle. Study of Region of Engineering Design Based on Approximate Computation of Integration[J]. Journal of Northwest Normal University：Natural Science： Thesis Collection of Research and Teaching，2008(42)：8-11.

[8] 李平乐. 基于工程设计计算的新的积分不等式与数学模型的研究[J]. 太原师范学院学报：自然科学版，2009，8(3)：32-35.
Li Pingle. Mathematical Models Research for New Integral Inequalities Based on Engineering Design Computation[J]. Journal of Taiyuan Normal University：Natural Science Edition，2009，8(3)：32-35.

[9] 李平乐. 工程设计计算方法的精度分析[J]. 沈阳工程学院学报：自然科学版，2010，6(1)：94-96.
Li Pingle. Accuracy Analysis of Calculation Method for Engineering Design[J]. Journal of Shenyang Institute of Engineering：Natural Science，2010，6(1)：94-96.

[10] 李平乐. 定积分换元与新的积分不等式结合在工程设计计算中的应用[J]. 焦作大学学报，2010(1)：114-115.
Li Pingle. Application of the Combination of Converting Elements of Definite Integration and New Inequalities in Engineering Design Computation[J]. Journal of Jiaozuo University，2010(1)：114-115.

[11] 李平乐. 新的积分近似计算方法在工程设计中的应用之一[J]. 太原师范学院学报：自然科学版，2008，7(3)：37-39.
Li Pingle. One of the Uses for a New Method of Demonstrating Approximate Computation of Integration in Engineering Design[J]. Journal of Taiyuan Normal University：Natural Science Edition，2008，7(3)：37-39.

[12] 李平乐. 对多类积分不等式求解工程设计同一值的研究[J]. 太原师范学院学报：自然科学版，2010，9(4)：40-43.
Li Pingle. Solving the Alike Value’s Research of Engineering Design for Many Forms Integral Inequalities[J]. Journal of Taiyuan Normal University：Natural Science Edition，2010，9(4)：40-43.

（责任编辑：邓光辉）