第25卷 第5期
2011年9月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.25 No.5
Sep. 2011

矩阵理论在线性代数复习课教学中的应用

张启明[1]，唐先华[2]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 中南大学 数学科学与计算技术学院，湖南 长沙 410081）

摘　要：提出了从矩阵理论出发以矩阵为主线，对线性代数课程内容进行归纳和整理的复习方法，并给出复习的具体做法。

关键词：线性代数；复习课；矩阵理论

中图分类号：G642.0　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)05-0095-03

Applications of Matrix Theories in the Review Teaching of Linear Algebra Course

Zhang Qiming[1]，Tang Xianhua[2]

（1. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Mathematical Sciences and Computing Technology，Central South University，Changsha 410081，China）

Abstract：On the basis of the matrix theories, proposes a new review method for summarizing and organizing the Linear Algebra course. And gives some specific practices.

Keywords：linear algebra；reviewing class；matrix theory

0 引言

线性代数是大学理工和经济类等专业的重要基础课。近年来，许多学者和一线教师都致力于线性代数课程教学的改革与实践，并取得了一定成效。如王跃恒等人[1]进行了“以学生为中心”的线性代数课程教学的研究与实践。唐杨斌等人[2]对线性代数教学中教学内容的引入进行了研究，提出了一些新的导入方法。但线性代数内容丰富、抽象，需要掌握的概念、定理较多，其自身的语言、符号系统复杂，解题技巧和方法灵活多变，这给学生的学习带来了困难。多年来，线性代数课程内容几乎没有变化，但教学课时大为减少，据了解，有些高校已降至40课时。另外，作为一门公共课，线性代数的教学一般采用大班授课，使得传统的教学方法受到限制，不得不采用多媒体课件教学，教学效果也随之受到影响。因此，对大多数学生来说，新课上完后，对所学内容一知半解似懂非懂，知识结构混乱。为了保证教学质量，教师必须在传统教学方法的基础上进行改革和创新。而复习是对已授知识的整理、巩固、查漏补缺，从而使学生的认知得到深化和提高。如何科学、合理、高效地利用少量的复习课时显得非常重要。本文以刘金旺、夏学全主编的《线性代数》教材[3]为依据，探讨如何以矩阵为逻辑主线，应用矩阵理论组织线性代数复习课的教学。

收稿日期：2011-06-28
基金项目：湖南省教育科学“十一五”规划重点课题基金资助项目（XJK08AGD004），湖南省教育厅教学改革基金资助项目（20083263），湖南省教育厅精品课程建设基金资助项目（湘教通[2009]252），湖南工业大学教学改革基金资助项目（2010D31）
作者简介：张启明（1974-），女，湖南涟源人，湖南工业大学副教授，中南大学博士生，主要从事高等数学教学与研究，E-mail：zhqm20082008@sina.com

1 立足根本掌握相关矩阵理论

教材[3] 中，除选学内容外，教学内容有：行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、特征值与二次型。为利用矩阵理论，使教学内容在矩阵这一主线下更具系统性，复习时将课程内容的顺序调整为：矩阵、线性方程组、向量空间、行列式、特征值与二次型。

矩阵是数表，是线性代数中重要的表示工具之一。复习矩阵这部分内容时，必须以矩阵运算，特别是矩阵的逆，矩阵的初等变换以及矩阵的秩为重点进行归纳整理，使学生对矩阵理论有较清晰的认识，举例如下。

逆矩阵的计算，主要有 2 种方法。

1）公式法（或称伴随矩阵法）。即用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$求逆矩阵，但这种方法计算量较大，通常运用在理论上或求阶数较低方阵的逆矩阵。

2）初等行变换法。这是求逆矩阵的主要方法，矩阵的初等变换是指以下 3 种变换：

交换矩阵的两行（列）；

以一个非零常数 k 乘矩阵的某行（列）；

把矩阵的第 i 行（列）所有元素的 k 倍加到第 j 行（列）对应元素上。

经过初等行变换，可将矩阵化成几种特殊形式，过程如下：

矩阵 $\boldsymbol{A}$ →阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ →行最简形矩阵 $\boldsymbol{C}$ → 等价标准形矩阵 $\boldsymbol{D}$。

矩阵的秩的计算，主要有 3 种方法：

1）定义法（或称子式法）；

2）初等变换法；

3）等价标准形法，即将矩阵化为等价标准形后，1 的个数就是矩阵的秩。

在复习课中，可适当地将矩阵有关问题的反问题[4-5]提出来，从正反两方面与学生一起探讨，让学生加深对相关知识的理解，提高他们的综合认知能力，为下一步复习中知识的展开做铺垫。例如，对方阵、方阵的逆、方阵的伴随矩阵之间的关系可给出如下问题[5]：

正问题 已知方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$，假设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则可求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$。

反问题 已知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{A}^*$，如何求 $\boldsymbol{A}$？

2 用矩阵理论复习线性方程组

线性方程组是线性代数研究的核心问题之一，其内容为线性方程组解的存在性，解的个数以及解的结构问题。线性方程组可用矩阵表示为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的形式，线性方程组这一章的所有问题都可以用矩阵理论来解答。如，线性方程组解的个数，可用矩阵的秩来判断；线性方程组解的结构，只需对其增广矩阵实施初等行变换，化为行最简形矩阵，再将行最简形矩阵还原成线性方程组，求出其通解。由于线性方程组的相关内容并不深奥，只是形式上稍微复杂，熟练掌握矩阵理论后，复习线性方程组这一章时，只需用矩阵的秩以及矩阵的初等变换归纳出解线性方程组的方法，适当讲解代表性的例题并进行练习即可。

3 用矩阵理论复习向量空间

向量与向量空间是本课程的学习难点之一。由于向量的线性相关性涉及到大量的定义、引理、定理以及复杂的推理，而导致学生学习困难。因此，这部分内容是复习的重点，复习时要理顺它们之间的关系，形成系统的知识结构和网络。例如，复习向量组的秩这一知识点时，由于向量组的秩位于这一章的第四节，前 3 节中有向量组的线性相关性及线性相关性的判别定理等内容，而向量组的秩又是向量空间这一章的重点和难点。尽管多数教师讲授新课时详细讲解了如何将求向量组的秩转化为求矩阵的秩，因涉及的引理、定理较多，大部分学生不一定完全掌握。复习时，要注意归纳教材中提到的向量组的秩的相关理论和方法，举例如下。

1）向量组的秩即该向量组极大线性无关组所含向量的个数。

2）若向量组本身所含向量的个数与秩相等，则该向量组线性无关；若所含向量的个数大于秩，则该向量组线性相关。

3）用求向量组秩的方法判断向量组是否线性相关，是判断线性相关性的常用方法。

由此联想到有关的矩阵理论：

1）矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 可看作是由 m 个行向量或 n 个列向量所构成。

2）矩阵的秩等于向量组的行秩和列秩。

3）初等变换不改变矩阵的秩。

因此，可以利用这些矩阵理论，将矩阵的秩和向量组的秩联系起来，并通过画知识结构图或表来直观地描述这些知识之间的相互关系，从而降低这 部分知识的难度，使学生易于理解和掌握。

4　用矩阵理论复习行列式

行列式是教材[3]的第一章，行列式的定义教材中给出了构造性定义和归纳性定义。对学生来说，行列式的构造性定义较抽象复杂，归纳性定义也较陌生。在新课讲授这一概念时，教学效果一般不太理想，上复习课时由于时间限制，也没有太多时间去进行分析和讲解。理解行列式的定义，掌握行列式的构造原理是学好本章核心内容（行列式性质及计算）的重要前提。行列式在线性代数中的主要作用是用来判断向量组的线性相关性，因此先复习矩阵、向量空间和线性方程组，由向量组的线性相关性和矩阵的初等行变换来导出行列式的构造性定义，这样步步为营，层层递进，让学生能更好地接受和理解概念。有了这一基础后，再去复习行列式的性质及计算等其他相关内容，就可使行列式的性质和矩阵的初等行变换等矩阵理论达到本质上的统一，使学生在认知上实现升华。

5　用矩阵理论复习特征值与二次型

特征值与二次型这一章主要包括施密特正交法、特征值与特征向量、矩阵的对角化、二次型和正定二次型等内容，其中将矩阵对角化和化二次型为标准形是本章的重点和难点，正定二次型是二次型的特殊情形。特征值和特征向量的计算，用到的主要知识是向量组的线性相关性和解线性方程组等内容。全章内容可由 4 类特殊矩阵串联起来，即正交矩阵、相似矩阵、合同矩阵以及正定矩阵。矩阵相似和矩阵合同，是指 2 个矩阵之间的相似关系和合同关系。复习时，应先对这 4 类矩阵进行比较分析，然后运用相关矩阵理论将整章内容融会贯通。如二次型是非线性问题中最简单的应用模型。由于一个二次型 f 与一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一一对应，因此，化二次型为标准形，就是利用矩阵的合同关系找到一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，而对任意一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，都存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$，使得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$。追本溯源，二次型的问题就转化成矩阵理论中矩阵的合同和矩阵的初等变换问题。

6　结语

总之，从矩阵理论出发，以矩阵为主线，将矩阵理论贯穿于线性代数课程的始终，对内容进行归纳、整理是复习线性代数的一种新思路，有助于学生从宏观上整体理解和掌握教材各知识点。

参考文献：

[1] 王跃恒，孙　倩，张少峰，等.“以学生为中心”的线性代数课程教学研究与实践[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(2)：99-101.
Wang Yueheng，Sun Qian，Zhang Shaofeng，et al. Research and Practice of‘Student-Centered’Linear Algebra Teaching[J]. Journal of Hunan University of Technology，2010，24(2)：99-101.

[2] 唐扬斌，陈　挚，戴清平. 关于线性代数课程引入的思考[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(2)：77-79.
Tang Yangbin，Chen Zhi, Dai Qingping. Thinking on Introduction of Linear Algebra Course[J]. Journal of Hunan University of Technology，2010，24(2)：77-79.

[3] 刘金旺，夏学全. 线性代数[M]. 3 版. 上海：复旦大学出版社，2009.
Liu Jinwang，Xia Xuequan. Linear Algebra[M]. 3rd ed. Shanghai：Fudan University Press，2009.

[4] 陈兴同. 关于工科“线性代数”课程中的反问题[J]. 大学数学，2009，25(5)：190-194.
Chen Xingtong. On Inverse Problems in the Engineering Course“Linear Algebra”[J]. College Mathematics，2009，25(5)：190-194.

[5] 张利兵. 线性代数理论中几个反问题的研究[J]. 洛阳师范学院学报，2010，29(5)：26-29.
Zhang Libing. Several Inverse Problems on Linear Algebra and the Methods of Finding the Solution[J]. Journal of Luoyang Normal University，2010，29(5)：26-29.

（责任编辑：邓光辉）