一阶脉冲微分方程无穷边值问题

尹奇峰

（湖南安全技术职业学院 基础课部，湖南 长沙 410151）

摘　要：运用Krasnosel′skii′s不动点定理，研究了无穷区间上一阶脉冲微分方程边值问题解的存在条件，得到了解的存在准则，并给出了实例。

关键词：不动点定理；脉冲微分方程；边值

中图分类号：O175.14　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)05-0018-04

Infinite Boundary Value Problems for First Order Impulsive Differential Equations

Yin Qifeng

（Basic Courses Department，Hunan Vocational Institute of Safety & Technology，Changsha 410151，China）

Abstract: By using Krasnosel'skii's fixed point theorem，studies the existence conditions of the solutions of infinite boundary value problems for first order impulse differential equations, obtains the existence criterions of the solutions, and gives an example.

Keywords: fixed point theorem; impulse differential equations; boundary

0　引言

近年来，借助不动点定理研究非线性微分方程边值问题解的存在性，引起了学者们的关注[1]。受文献[2-5]的启发，对式（1）所示的一阶无穷区间上脉冲边值问题，本文运用Krasnosel'skii's不动点定理讨论了其解的存在性。

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)), \quad t\in(0,+\infty)\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\,; \\ \Delta u(t_k)=I_k\left(u(t_k)\right), \quad k=1,2,\cdots,n\,; \\ \beta u(0)=u(+\infty)\,; \end{cases} \tag{1}$$

式中：$f\in \mathrm{C}\left[(0,+\infty)\times\mathbf{R},\mathbf{R}\right]$；

I_k：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$k=1, 2, \cdots, n$是李普希兹连续的；

$\Delta u(t_k)=u(t_k^+)-u(t_k^-)$，其中$u(t_k^-)$和$u(t_k^+)$分别是$u(t)$在$t=t_k$，$k=1, 2, \cdots, n$的左、右极限；

$u(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)$；

$\beta>1$是常数。

1　预备知识

设$J=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}$，

$X=\mathrm{PC}[0,+\infty)=\{u:u\in\mathrm{C}([0,+\infty)\setminus J)\}$，

$u(t_k^-)$和$u(t_k^+)$存在且$u(t_k^-)=u(t_k)$，其范数为

$$\|u\|=\max\left\{\sup_{t\in[0,+\infty)}|u(t)|,u(t_1^+),\cdots,u(t_n^+)\right\};$$

$Y=\mathrm{PC}^1[0,+\infty)=\{u:u\in X\}$

u在(t_{k-1},t_k)内连续可导，$k=1, 2, \cdots, n$。

本文将在X中寻求边值问题（1）的解。

若没有特别说明，有下列2个条件成立：

Ⅰ）存在函数$\varphi_1,\varphi_2:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$满足

$\int_0^{+\infty}\varphi_1(s)\mathrm{d}s<+\infty,\int_0^{+\infty}\varphi_2(s)\mathrm{d}s<+\infty$，

收稿日期：2011-06-05

作者简介：尹奇峰（1972-），男，湖南邵阳人，湖南安全技术职业学院讲师，硕士，主要研究方向为微分方程理论及应用，E-mail：yinqif@163.com

使得

$|f(t,x)| \le \varphi_1(t)+\varphi_2(t)|x|$，$t\in[0,+\infty)$，$x\in\mathbf{R}$。

Ⅱ）存在常数 $C_k>0$，使得

$|I_k(x)-I_k(y)| \le C_k|x-y|$，$x,y\in\mathbf{R}$，$k=1,2,\cdots,n$。

为解决边值问题（1），先给出以下 4 个引理。

引理 1[2]　设 $F\ne\Phi$ 是 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的一个有界闭凸子集，如果满足：

1）映射 $A:F\to X$ 是全连续的；

2）映射 $B:F\to X$ 是一个压缩映射；

3）对于所有的 $u,v\in F$，有 $Au+Bv\in F$；

则映射 $A+B$ 在 F 中有一个不动点。

引理 2　函数 $u\in X\cap Y$ 是脉冲边值问题（1）的解当且仅当 u 满足方程

$$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)I_k(u(t_k)),\ t\in[0,+\infty),$$

式中 $G(t,s)$ 是方程（1）的格林函数，即

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\beta-1},\ 0\le s\le t;\\ \dfrac{1}{\beta-1},\ s>t\ge 0。\end{cases}$$

证明参见文献[3]。

引理 3[4]　设 W 是 X 的有界子集，如果 $\{W(t)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 的任意有限子区间上等度连续，且对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $N>0$，使得对于 $x\in W$，当 $t_1,t_2\ge N$ 时，有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$ 一致成立，其中 $W(t)=\{x(t):x\in W\}$，那么 W 在 X 中是相对紧集。

引理 4（Arzela-Ascoli)[6]　$C[a,b]$ 中，集 A 是一个列紧集的充要条件是 A 一致有界且等度连续。

2　主要结论

设 $r>0$ 且给出 $X\cap Y$ 的一个闭凸子集

$$M=\{u\in X\cap Y:\|u\|\le r\},\tag{2}$$

对所有 $t\in[0,+\infty)$，令

$$Au(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

$$Bu(t)=\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)I_k(u(t_k))。$$

定义

$$D_i=\sup_{t\in[0,+\infty)}\left[\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t\varphi_i(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\beta-1}\int_t^{+\infty}\varphi_i(s)\mathrm{d}s\right],\ i=1,2,3;\tag{3}$$

$$q=\sum_{k=1}^{n}\sup_{t\in[0,+\infty)}|G(t,t_k)|C_k;\tag{4}$$

$$K_0=\sum_{k=1}^{n}\sup_{t\in[0,+\infty)}|G(t,t_k)||I_k(0)|。\tag{5}$$

利用 Krasnosel'skii's 不动点定理讨论边值问题（1），可得定理 1 的结论。

定理 1　设 1 节中的条件Ⅰ）和Ⅱ）满足，且 $D_1,K_0\ge 0$，$D_2,q>0$，使 $D_1+K_0>0$，$D_2+q<1$ 成立，则对每个 $r>0$ 有

$$D_1+K_0+(D_2+q)r\le r。\tag{6}$$

从而脉冲边值问题（1）至少存在一个解 $u\in X\cap Y$，满足 $\|u\|\le r$。

证　设 $r>0$，M 由式（2）定义，分 3 步证明映射 $A:M\to X\cap Y$ 是全连续的，。

1）证明 A 是从 M 到 $X\cap Y$ 上的映射。

设 $u\in M$，由条件Ⅰ）、$G(t,s)$ 的定义及 $f(s,u(s))$ 的连续性知，对任意 $t_1,t_2\in(t_{k-1},t_k)$，$k=1,2,\cdots,n$，且 $t_1<t_2$ 有 $|(Au)(t_1)-(Au)(t_2)|\to 0\ (t_1\to t_2)$；易得 $Au(t_k^+)$，$Au(t_k^-)$ 存在，且 $Au(t_k^-)=Au(t_k)$，因此 $Au\in X$。

对任意 $t,t+\Delta t\in(t_{k-1},t_k)$，$\Delta t>0$，$k=1,2,\cdots,n$，

$$Au(t+\Delta t)-Au(t)=\int_t^{t+\Delta t}f(s,u(s))\mathrm{d}s=f(\xi,u(\xi))\Delta t,\ t<\xi<t+\Delta t;$$

当 $\Delta t<0$ 时，有 $t+\Delta t<\xi<t$，上式同样成立。

从而 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Au(t)]=f(t,u(t)),Au\in Y$。

所以 $Au\in X\cap Y$。

2）证明映射 $A:M\to X\cap Y$ 是连续的。

设当 $n\to+\infty$，$u_n\to u$，$u_n,u\in M$。证明在 $X\cap Y$ 中，当 $n\to+\infty$ 时，$Au_n\to Au$。

由条件Ⅰ）得

$$|Au_n(t)-Au(t)|=\left|\int_0^{+\infty}\left(G(t,s)f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right)\mathrm{d}s\right|<+\infty$$

由勒贝格控制收敛定理及 f 的连续性，得

$$|Au_n(t)-Au(t)|=\left|\int_0^{+\infty}\left(G(t,s)f(s,u_n(s))-f(s,u(s))\right)\mathrm{d}s\right|\to 0,\ n\to+\infty。$$

因此 A 是连续的。

3）证明映射 $A:M\to X\cap Y$ 是紧的。

先证明一个不等式。

$$\|Au\|=\sup_{t\in[0,+\infty)}\left|\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|\le$$
$$\sup_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}|G(t,s)||f(s,u(s))|\mathrm{d}s\le$$
$$\sup_{t\in[0,+\infty)}\left[\frac{\beta}{\beta-1}\int_0^t(\varphi_1(s)+\varphi_2(s)|u(s)|)\mathrm{d}s+\frac{1}{\beta-1}\int_t^{+\infty}(\varphi_1(s)+\varphi_2(s)|u(s)|)\mathrm{d}s\right]\le$$
$$D_1+D_2\|u\|\le D_1+D_2r。\qquad(7)$$

设 S 是 M 的任意有界子集，即存在 r_1 使得 $\|u\|\le r_1\le r$，由式（7）知

$$\|Au\|\le D_1+D_2r_1<+\infty,$$

因此 AS 是一致有界的。

用类似证明算子 A 连续的方法，可得 AS 是等度连续的。由引理4知 AS 是一个列紧集，从而 A 是映 M 入 $X\cap Y$ 的紧算子。由全连续算子定义[7]知映射 $A:M\to X\cap Y$ 是全连续的。

显然 B 是从 M 到 $X\cap Y$ 上的映射。设 $u,v\in M$，则由条件Ⅱ）和式（4）有

$$\|Bu-Bv\|=$$
$$\sup_{t\in[0,+\infty)}\left|\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)I_k(u(t_k))-\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)I_k(v(t_k))\right|\le$$
$$\sup_{t\in[0,+\infty)}\sum_{k=1}^{n}|G(t,t_k)||I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))|\le$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sup_{t\in[0,+\infty)}|G(t,t_k)|C_k|u(t_k)-v(t_k)|\le$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sup_{t\in[0,+\infty)}|G(t,t_k)|C_k|u-v|\le q\|u-v\|。$$

由于 $q<1$，因此映射 $B:M\to X\cap Y$ 是一个压缩映射。

由式（5）得

$$\|B_0\|=\sup_{t\in[0,+\infty)}|B_0(t)|\le\sup_{t\in[0,+\infty)}\sum_{k=1}^{n}|G(t,t_k)||I_k(0)|\le K_0。$$

根据式（6）并结合上面的范数估值，得

$$\|Au+Bv\|\le\|Au\|+\|Bv\|\le$$
$$D_1+D_2\|u\|+\|Bv-B_0\|+\|B_0\|\le$$
$$D_1+D_2\|u\|+q\|v\|+K_0\le$$
$$D_1+K_0+(D_2+q)r\le r,$$

即 $Au+Bv\in M$。

因为引理1中所有条件满足，则映射 $A+B$ 在 M 中有一个不动点，由引理2得脉冲边值问题存在解 $u\in X\cap Y$，且 $\|u\|\le r$。定理得证。

不等式条件Ⅰ）和Ⅱ）是在 $\mathbf{R}$ 上满足，故称是全局型的，因此，当选择 $r>0$ 由脉冲边值问题（1）的参数控制时，引理1的条件1）和2）自动满足。考虑另一种方法，固定 $r>0$ 并附加以下条件（局部条件）：

Ⅲ）存在函数 $\varphi_1,\varphi_2:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足

$$\int_0^{+\infty}\varphi_1(s)\mathrm{d}s<+\infty,\int_0^{+\infty}\varphi_2(s)\mathrm{d}s<+\infty,$$

使得

$$|f(t,x)|\le\varphi_1(t)+\varphi_2(t)|x|,\ t\in[0,+\infty),\ |x|\le r。$$

Ⅳ）存在常数 $C_k>0$ 使得

$$|I_k(x)-I_k(y)|\le C_k|x-y|,\ |x|,|y|\le r,\ k=1,2,\cdots,n。$$

相应地有定理2的结论。

定理2 假设条件Ⅲ）和Ⅳ）满足，且 $D_1,K_0\ge0$，$D_2,q,r>0$，使 $D_1+K_0>0$ 和式（6）成立，则脉冲边值问题（1）至少有一个解 $u\in X\cap Y$，满足 $\|u\|\le r$。

证明 类似定理1，略。

再给出条件Ⅴ）：

Ⅴ）存在函数 $\varphi_3:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足

$$\int_0^{+\infty}\varphi_3(s)\mathrm{d}s<+\infty,$$

使得

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le\varphi_3(t)|x-y|,t\in[0,+\infty),x,y\in\mathbf{R}。$$

根据巴拿赫压缩映射原理有定理3。

定理3 假设条件Ⅱ）和Ⅴ）满足，且 q, $D_3>0$，$D_3+q<1$，则脉冲边值问题（1）有唯一解 $u\in X\cap Y$。

证 类似定理1的证明可知，脉冲边值问题（1）有至少一个解 $u\in X\cap Y$，下面证明解的唯一性。

假设存在两个解 $u(t)$，$v(t)$，则

$$u(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)I_k(u(t_k)),\quad t\in[0,+\infty);$$

$$v(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,v(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)I_k(v(t_k)),\quad t\in[0,+\infty)。$$

从而

$$|u(t)-v(t)|=\left|\int_0^{+\infty}G(t,s)(f(s,u(s))-f(s,v(s)))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)(I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k)))\right|\le$$
$$\int_0^{+\infty}G(t,s)|(f(s,u(s))-f(s,v(s)))|\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)|I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))|\le$$
$$\int_0^{+\infty}G(t,s)\varphi_3(s)|u(s)-v(s)|\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{n}G(t,t_k)C_k|u(t_k)-v(t_k)|\le$$
$$(D_3+q)|u(t)-v(t)|$$

由假设 $D_3+q<1$ 得 $|u(t)-v(t)|=0$，即 $u(t)=v(t)$。因此脉冲边值问题（1）有唯一解 $u\in X\cap Y$。

3　实例

例 1　边值问题

$$\begin{cases} u'(t)=\dfrac{t^7}{e^{t^8}}u(t)+\dfrac{1}{1+t^2},\ t\in(0,+\infty)\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}; \\ \Delta u(t_k)=\dfrac{1}{8(1+k)^2}u(t_k),\ k=1,2,\cdots,n; \\ 4u(0)=3u(+\infty); \end{cases}$$

至少存在一个解。

解　因为

$$f(t,u(t))=\frac{t^7}{e^{t^8}}u(t)+\frac{1}{1+t^2},I_k(u(t_k))=\frac{1}{8(1+k)^2},$$

$$\beta=\frac{4}{3},\varphi_1(t)=\frac{1}{1+t^2},\varphi_2(t)=\frac{t^7}{e^{t^8}},C_k=\frac{1}{8(1+k)^2},$$

经计算有

$$D_1=2\pi,q=\frac{\pi^2-6}{12}，K_0=0。$$

经验证方程满足定理 1 的所有条件，因此上述边值问题至少存在一个解。

参考文献：

[1] Liu Xinzhi. Periodic Boundary Value Problems for Impulsive Systems Containing Hammerstein Type Integrals[J]. Dynamic Systems Appl，1997(6)：517-528.

[2] Kaufmann E R，Kosmatov N， Raffoul Y N. A Second-Order Boundary Value Problem with Impulsive Effects on an Unbounded Domains[J]. Nonlinear Analysis：Theory, Methods & Applications，2008，69(9)：2924-2929.

[3] 张兴秋. Banach空间中一阶脉冲微分方程的无穷边值[J]. 应用数学，2005，18(1)：153-160.
Zhang Xingqiu. Infinite Boundary Value Problems for First Order Differential Equations in a Banach Space[J]. Mathematica Applicata，2005，18(1)：153-160.

[4] Zhang Xingqiu，Sun Jingxian. The Existence of Positive Polution for Singular Boundary Value Problems of First Order Differential Equation on Unbounded Domains[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica：English Series，2009，25 (1)：95-104.

[5] 赵育林，徐承杰. 二阶脉冲积分-微分方程周期边值问题的极限解[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(4)：27-31.
Zhao Yulin，Xu Chengjie. Extremal Solutions of Periodic Boundary Value Problems for Second-Order Impulsive Integro-Differential Equations[J]. Journal Hunan University of Technology，2010，24(4)：27-31.

[6] 夏道行. 实变函数论与泛函分析：下册[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，1983：98-105.
Xia Daoxing. Real Variable Function Theory and Functional Analysis：Next Volume[M]. 2nd ed. Beijing：Higher Education Press，1983：98-105.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 2 版. 济南：山东科学技术出版社，2002：21-22.
Guo Dajun. Nonlinear Functional Analysis[M]. 2nd ed. Jinan：Shangdong Science and Technology Press，2002：21-22.

（责任编辑：邓光辉）