一类二阶微分方程边值问题的近似解

黄　力[1]，段向阳[1]，欧　艳[2]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 株洲市第十九中学，湖南 株洲 412000）

摘　要：先用微积分运算把二阶微分方程的两点边值问题化成一个Fredholm积分方程。然后用泰勒矩阵的方法得到其近似解，即给出未知函数的n阶泰勒展开式，并通过矩阵运算得到泰勒展开式中每项的系数。

关键词：微分方程；积分方程；泰勒公式；近似解

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)03-0025-02

Approximate Solution to Boundary Value Problems of Second-Order Differential Equation

Huang Li[1]，Duan Xiangyang[1]，Ou Yan[2]

（1. College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. Zhuzhou No.19 Middle School，Zhuzhou Hunan 412000，China）

Abstract: Transforms the two-point boundary value problems of second-order differential equation to a Fredholm integral equation, obtains the approximate solution by Taylor-matrix method, which giving n-order Taylor′s expansion of the unknown function, and gets the coefficients of the Taylor′s expansion through Matrix operations.

Keywords: differential equations; integral equations; Taylor formula; approximate solution

求常微分方程边值问题近似解的方法主要是有限差分法。近年来，差分法不断完善，精度越来越高。此外，还有许多其他解法，如：利用格林函数的Runge-Kutta法，解析离散法[1-5]等。本文提出一种求二阶线性常微分方程两点边值问题近似解的新方法：泰勒矩阵法。

1　两点边值问题转化为积分方程

考虑二阶线性常微分方程的两点边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\lambda\varphi(x)=f(x),\\ x\in I=[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=0。\end{cases}\qquad(1)$$

为便于计算，令$\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}=y(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t+C_1,$$

两边积分，得：

$$\varphi(x)=\int_0^x \mathrm{d}v\int_0^v y(t)\mathrm{d}t+C_1x+C_2,$$

交换积分次序得：

$$\varphi(x)=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t\int_t^x \mathrm{d}v+C_1x+C_2=$$
$$\int_0^x (x-t)y(t)\mathrm{d}t+C_1x+C_2。$$

由边界条件可知

$C_1=-\int_0^1(1-t)y(t)\mathrm{d}t$，$C_2$=0；

收稿日期：2011-02-08
作者简介：黄　力（1981-），男，湖南邵阳人，湖南工业大学讲师，硕士，主要研究方向为微分方程，
E-mail：li.huang1017@yahoo.com

于是

$$\varphi(x)=\int_0^x (x-t)y(t)\mathrm{d}t - x\int_0^1 (1-t)y(t)\mathrm{d}t,$$

或写成

$$\varphi(x)=-\left[\int_0^x t(1-x)y(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 x(1-t)y(t)\mathrm{d}t\right];$$

代入方程（1），得第二类Fredholm积分方程：

$$y(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)y(t)\mathrm{d}t=f(x), \tag{2}$$

式中：$K(x,t)=\begin{cases} t(1-x),\ 0\le t\le x; \\ x(1-t),\ x\le t\le 1。\end{cases}$

2 泰勒矩阵法

设未知函数$y(x)\in C^{n+1}(I)$，为求方程（2）的解，将$y(x)$按$(x-c)$的幂展开成带有Lagrange余项的n阶泰勒公式：

$$y(x)=y(c)+y'(c)(x-c)+\cdots+y^{(n)}(c)\frac{(x-c)^n}{n!}+ R_n(x,c),\ 0<c<1。 \tag{3}$$

当n很大时，Lagrange余项$R_n(x,c)$可足够小，从而可忽略不计。通过解线性方程组把式（3）的系数$y(c), y'(c), \cdots, y^{(n)}(c)$分别求出，从而求得未知函数的近似解。

将由式（3）所得的未知函数的近似表达式$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(t-c)^i}{i!}y^{(i)}(c)$代入方程（2）得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-c)^i}{i!}y^{(i)}(c)-\lambda\int_0^x K(x,t)\sum_{i=1}^{n}\frac{(t-c)^i}{i!}y^{(i)}(c)\mathrm{d}t=f(x);$$

整理得

$$k_{00}(x)y(c)+k_{01}(x)y'(c)+\cdots+k_{0n}(x)y^{(n)}(c)=f(x), \tag{4}$$

式中：

$$k_{0i}(x)=\frac{(x-c)^i}{i!}-\lambda\int_0^x K(x,t)\frac{(t-c)^i}{i!}\mathrm{d}t, i=0,1,\cdots,n。$$

这样，得到了关于未知数$y(c), y'(c), \cdots, y^{(n)}(c)$的一个方程。

为了求出这$n+1$个未知数，再将方程（2）两边同时对x从0到s积分得

$$\int_0^s y(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^s\int_0^1 K(x,t)y(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^s f(x)\mathrm{d}x;$$

交换积分顺序并交换x, s得

$$\int_0^x y(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_0^1\left[\int_0^x K(s,t)\mathrm{d}s\right]y(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$

再将$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(t-c)^i}{i!}y^{(i)}(c)$代入上面的方程得

$$k_{10}(x)y(c)+k_{11}(x)y'(c)+\cdots+k_{1n}(x)y^{(n)}(c)=f_{(1)}(x), \tag{5}$$

式中：

$$\begin{cases} k_{1i}(x)=\dfrac{(x-c)^{i+1}-(-c)^{i+1}}{(i+1)!}-\lambda\dfrac{\int_0^1\left[\int_0^x K(s,t)\mathrm{d}t\right](t-c)^i\mathrm{d}t}{i!}, \\ i=1,2,\cdots,n; \\ f_{(k)}(x)=\dfrac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1}f(t)\mathrm{d}t,\ k\ge 1。\end{cases}$$

这样，又得到了关于$y(c), y'(c), \cdots, y^{(n)}(c)$的另外一个方程。

重复上面这个积分步骤$n+1$次，得到

$$\int_0^x y(t)(x-t)^{j-1}\mathrm{d}t-\lambda\int_0^1\left[\int_0^x (x-s)^{j-1}K(s,t)\mathrm{d}s\right]y(t)\mathrm{d}t= f_{(j)}(x),\ 1<j\le n;$$

将$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(t-c)^i}{i!}y^{(i)}(c)$代入上面的方程得

$$k_{j0}(x)y(c)+k_{j1}(x)y'(c)+\cdots+k_{jn}(x)y^{(n)}(c)= f_{(j)}(x), 1<j\le n, \tag{6}$$

式中：

$$k_{ji}(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{j-1}(t-c)^i}{i!}\mathrm{d}t- \lambda\frac{\int_0^1\left[\int_0^x (x-s)^{j-1}K(s,t)\mathrm{d}t\right](t-c)^i\mathrm{d}t}{i!},\ i=1,2,\cdots,n。$$

至此，由方程（4），（5），（6），…，构成了关于$n+1$个未知数$y(c), y'(c), \cdots, y^{(n)}(c)$的$n+1$个独立方程组成的方程组

$\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{F}(x)$,

式中：$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix} k_{00}(x) & k_{01}(x) & \cdots & k_{0n}(x) \\ k_{10}(x) & k_{11}(x) & \cdots & k_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n0}(x) & k_{n1}(x) & \cdots & k_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} y(c) \\ \vdots \\ y^{(n)}(c) \end{pmatrix}, \boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f_{(n)}(x) \end{pmatrix}。$$

如果$|\boldsymbol{A}(x)|\ne 0$，那么可得向量：

$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{F}(x)$。

从而得到未知函数$y(x)$的n阶近似解，最终可求出$\varphi(x)$。

3 结语

本文介绍了用泰勒矩阵法求解一类二阶微分方程边值问题近似解的方法。首先将微分方程化成积分方程，再给出未知函数的泰勒展开式，利用线性

（下转第96页）