齐次函数 Euler 公式的一类推广

郭求知，夏建业，宁光荣

（广东金融学院 应用数学系，广东 广州 510521）

摘　要：通过使可微多元齐次函数的条件一般化，将 k 次齐次函数的 Euler 公式推广到了一般情形，给出了相关结论，为一类多元函数偏导数求解问题提供了简便方法。

关键词：齐次函数；可微；偏导数；Euler 公式

中图分类号：O172.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)02-0010-03

Spreading Euler Formula of Homogeneous Function

Guo Qiuzhi，Xia Jianye，Ning Guangrong

（Department of Applied Mathematics，Guangdong University of Finance，Guangzhou 510521，China）

Abstract：By generalizing the condition of differential homogeneous function, spreads the k-Euler formula of homogeneous function to common case and presents some correlation theorems and corollaries. Provides a simple and convenient method to solve the partial derivartive of a kind of multivariate function.

Keywords：homogeneous function; differentiable; partial derivative; Euler formula

0　引言

多元函数的偏导数应用较广[1-4]，求偏导数是数学和其他科技工作者经常遇到的问题。多元函数偏导数的求法，是人们关注的重点[5-7]，一般采用传统的“链式法则”，该方法过程复杂，计算量大。齐次函数的 Euler 公式的应用范围较广[8-10]，用它可简化求多元函数偏导数的过程。

本文把可微多元齐次函数的条件一般化，将 k 次齐次函数的 Euler 公式推广到一般情形，给出了相关结论，为一类多元函数的偏导数求解问题提供了一种简便的方法。

1　引理及主要结论

定义 1　若 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足：

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 k 次齐次函数。

引理 1　若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 k 次齐次函数，且有连续偏导数，则有 $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=kf$；反之，有连续偏导数的函数，如果适合上式，则是 k 次齐次函数。

引理 1 中等式 $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=kf$，称为齐次函数的 Eular 公式。

将多元齐次函数的条件

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

一般化为：

$$f\left(t^{k_1}x_1,t^{k_2}x_2,\cdots,t^{k_n}x_n\right)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

由多元函数偏导数理论，有下述定理 1。

收稿日期：2010-11-20

作者简介：郭求知（1980-），男，湖南益阳人，广东金融学院教师，硕士，主要从事图论及其应用和函数论研究，
E-mail：guoqiuzhi68@yahoo.cn

定理1　若函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足：

$$f\left(t^{k_1}x_1,t^{k_2}x_2,\cdots,t^{k_n}x_n\right)=t^k f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),\qquad(1)$$

k_i不全为0，且有连续偏导数，则有$\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=kf$。

证明　将式（1）两端对t求偏导数，得：

$$k_1t^{k_1-1}x_1\frac{\partial f}{\partial\left(t^{k_1}x_1\right)}+k_2t^{k_2-1}x_2\frac{\partial f}{\partial\left(t^{k_2}x_2\right)}+\cdots+$$

$$k_nt^{k_n-1}x_n\frac{\partial f}{\partial\left(t^{k_n}x_n\right)}=kt^{k-1}f,$$

令t=1，有

$$k_1x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+k_2x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+k_nx_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=kf,$$

定理得证。

在定理1中，

1）令$k_1=k_2=\cdots=k_n=1$，则得引理1中的Euler公式。

2）令k_1=1，则定理1的条件变为：

$$f\left(tx_1,t^{k_2}x_2,\cdots,t^{k_n}x_n\right)=t^k f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)。$$

当tx_1=1，即$t=\dfrac{1}{x_1}$，从而有，

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\frac{f\left(tx_1,t^{k_2}x_2,\cdots,t^{k_n}x_n\right)}{t^k}=$$

$$x_1^k f\left(1,\frac{x_2}{x_1^{k_2}},\cdots,\frac{x_n}{x_1^{k_n}}\right),$$

此时，f与t无关。

类似地考察k_i，i=2, 3, $\cdots$,n，得推论1。

推论1　设函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足：

$$f\left(t^{k_1}x_1,t^{k_2}x_2,\cdots,t^{k_n}x_n\right)=t^k f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right),$$

若k_i=1，则有

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=$$

$$x_i^k f\left(\frac{x_1}{x_i^{k_1}},\cdots,\frac{x_{i-1}}{x_i^{k_{i-1}}},1,\frac{x_{i+1}}{x_i^{k_{i+1}}},\cdots,\frac{x_n}{x_i^{k_n}}\right)。$$

2　应用举例

例1　若$u(x,y,z)=x^n f\left(\dfrac{y}{x^\alpha},\dfrac{z}{x^\beta}\right)$，其中$f$是任意可微的函数，求证$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$。

证法1　用传统的“链式法则”。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=nx^{n-1}f+x^n(-\alpha)\frac{y}{x^{\alpha+1}}f_1'+x^n(-\beta)\frac{z}{x^{\beta+1}}f_2'=$$

$$nx^{n-1}f-\alpha yx^{n-(\alpha+1)}f_1'-\beta zx^{n-(\beta+1)}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^n\frac{1}{x^\alpha}f_1'=x^{n-\alpha}f_1',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^n\frac{1}{x^\beta}f_2'=x^{n-\beta}f_2',$$

所以

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta y\frac{\partial u}{\partial z}=$$

$$nx^nf-\alpha yx^{n-\alpha}f_1'-\beta zx^{n-\beta}f_2'+\alpha yx^{n-\alpha}f_1'+$$

$$\beta zx^{n-\beta}f_2'=nx^nf=nu。$$

证毕。

证法2　用文中定理1。

因为$u(x,y,z)=x^n f\left(\dfrac{y}{x^\alpha},\dfrac{z}{x^\beta}\right)$满足：

$$u\left(tx,t^\alpha y,t^\beta z\right)=t^nx^nf\left(\frac{y}{x^\alpha},\frac{z}{x^\beta}\right)=t^nu(x,y,z),\ t>0。$$

由定理1得：

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu。$$

证毕。

比较2种证明方法可以看出，对满足齐次函数条件的多元函数，用定理1的结论，可以很快捷地解决一些有关偏导数的问题。

参考文献：

[1]　郭春英. 利用多元函数的偏导数来探讨血管分支问题[J]. 科技信息，2010(26)：517-518.

Guo Chunying. Using Partial Derivative of Multivariate Function to Explore Vascular Branch Problem[J]. Science & Technology Information，2010(26)：517-518.

[2]　赵　斌，王　勇，路　钰，等. 多元二次肥料效应函数极值的判别及函数优化[J]. 杂粮作物，2001，21(2)：42-45.

Zhao Bin，Wang Yong，Lu Yu，et al. The Extreme and Optimization of Multiple Quadratic Fertilizer Effect Function[J]. Rain Fed Crops，2001，21(2)：42-45.

[3]　李英德. 常用数学工具在热力学关系式证明中的应用[J]. 大学物理，2009，28(2)：24-27.

Li Yingde. Application of Common Mathematical Tools in the Identification of Thermodynamic Relation[J]. College Physics，2009，28(2)：24-27.

[4]　刘新国，姚增善. 梯度与等高线的教学体会[J]. 高等数学研究，2006，9(2)：50-51.

Liu Xinguo，Yao Zengshan. The Teaching Experience of Contour and Gradient[J]. Studies in College Mathematics，2006，9(2)：50-51.

[5]　王　君. 一种使用矩阵乘积和二次型表示多元函数二阶偏导数的推广解法[J]. 新疆师范大学学报: 自然科学版，

2008，27(1)：40-42.
Wang Jun. A Popularized Solution of Two-Order-Partial Derivative of Multivariable Function on Matrix of Product and Quadratic Form[J]. Journal of Xinjiang Normal University：Natural Sciences Edition，2008，27(1)：40-42.
[6] 李秀林. 对称偏导数及其性质[J]. 数学研究与学习，2010(3)：108-109.
Li Xiulin. Symmetrical Partial Derivative and Their Properties[J]. Mathematics Research and Study，2010(3)：108-109.
[7] 王　勇，张　浩. 广义二阶导数和二阶混合偏导数之间的关系[J]. 大学数学，2007，23(6)：163-165.
Wang Yong，Zhang Hao. The Relations between Generalized Second Derivative and Second Mixed Partial Derivative[J]. College Mathematics，2007，23(6)：163-165.
[8] Lasserre J B，Hiriart-Urruty J B. Mathematical Properties of Optimization Problems Defined by Positively Homogeneous Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2002，112(1)：31-52.
[9] 李成林，郑继刚. 欧拉公式在不可微齐次函数中的推广[J]. 保山师专学报，2007，26(2)：43-45.
Li Chenglin，Zheng Jigang. Spreading of Euler Formula on Indifferential Homogeneous Functions[J]. Journal of Baoshan Teachers College，2007，26(2)：43-45.
[10] 华罗庚. 高等数学引论[M]. 北京：科学出版社，1979.
Hua Luogeng. Introduction to Higher Mathematics[M]. Beijing：Science Press，1979.

（责任编辑：邓光辉）

《中国城市低碳发展2011》绿皮书在京发布

2011年3月2日上午，湖南工业大学与中国社会科学院城市发展与环境研究所合作重大科研成果——《中国城市低碳发展2011》绿皮书新闻发布会在北京隆重举行。新闻发布会由湖南工业大学与中国社会科学院城市发展与环境研究所、经济杂志社和全球低碳城市联合研究中心联合举办。该书是我国第一本全面、客观、系统地反映我国110个地级以上城市低碳发展状况的绿皮书，是湖南工业大学与中国社会科学院合作研究在社科领域的又一重大新突破，是积极服务社会发展和经济建设的又一突出新成果。中国社会科学院城市发展与环境研究所所长潘家华、党委书记兼副所长张新平，湖南工业大学校长王汉青，经济杂志社社长陈志强出席新闻发布会并讲话。中央电视台、人民日报、光明日报、新华社、人民网等15家中央级媒体参加了此次发布会。

（陈金湘）