具有输入饱和的时滞系统的相关稳定性分析

王　炜[1,2]，曾红兵[1]，肖伸平[1]

（1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412008；2. 湖南工贸技师学院，湖南 株洲 412000）

摘　要：讨论了具有输入饱和的时滞系统的时滞相关稳定与镇定问题。利用自由权矩阵方法，获得了闭环系统基于线性矩阵不等式（LMI）的时滞相关稳定化条件，同时给出了无记忆状态反馈控制器的设计方法。最后，数值实例表明了所给方法的有效性。

关键词：时滞相关；自由权矩阵方法；输入饱和；状态反馈

中图分类号：TP273　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)01-0101-04

Analysis on Delay-Dependent Stability of Delayed Systems with Saturating Input

Wang Wei[1,2]，Zeng Hongbing[1]，Xiao Shenping[1]

（1. College of Electrical and Information Engineering， Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China；
2. Hunan Technician College of Industry and Commerce，Zhuzhou Hunan 412000，China）

Abstract：The delay-dependent stability and stabilization of the delayed systems with saturating input is discussed. By employing the free-weighting matrixes approach, delay-dependent stabilization conditions for the closed-loop system based on linear matrix inequalities (LMI) are obtained and the design method for the controller of memoryless state feedback is presented. Finally, the effectiveness of the method is verified through a numerical example.

Keywords：delay-dependent；free-weighting matrixes approach；saturating input；state-feedback

0　引言

时滞现象普遍存在于各种工程、经济系统中，是导致系统性能变差甚至不稳定的原因之一，因此，时滞系统的稳定性分析与控制器设计得到了众多学者的广泛关注[1-9]。近几年，关于含输入饱和的时滞系统的时滞相关稳定性问题讨论较多[10-14]，处理这类饱和问题的方法主要有饱和相关条件[10-12]和饱和无关条件[13-14]，其中后者不受饱和程度的限制，所得条件比较简单。

本文针对具有输入饱和的时滞系统，应用Lyapunov-Krasovskii泛函方法，借助文献[13-14]对输入饱和的处理方法和文献[4]提出的自由权矩阵方法，获得了系统的时滞相关稳定化条件。进一步利用参数调整法[7]，给出无记忆状态反馈控制器的设计方法。

全文沿用以下标记：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置和逆；$\boldsymbol{P}>0$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 为对称正定矩阵；$\mathbf{R}^{n}$，$\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别表示实数域上的 n 维向量空间与 $n\times n$ 维矩阵空间；$\boldsymbol{I}$ 表示具有适当维数的单位矩阵；$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \cdots\ \boldsymbol{C}\}$ 表示块对角矩阵；“*”表示对称矩阵的对称项。

1　问题描述

考虑如下具有输入饱和驱动的不确定时滞系统：

收稿日期：2010-11-02
基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（10JJ6098），湖南省教育厅科技基金资助项目（10C0628）
作者简介：王　炜（1979-），女，天津人，湖南工贸技师学院讲师，主要研究方向为鲁棒控制和智能控制，
E-mail：wangwei9804@163.com

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-d(t))+\boldsymbol{B}\mathrm{sat}(u(t)),\\ \boldsymbol{x}(t)=\phi(t),t\in[-h,0]。\end{cases}\quad(1)$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$为系统状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$为控制输入向量，$\phi(t)$为初始函数，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}$为合适维数的常数实矩阵。

时滞$d(t)$满足如下条件：

$$0\le d(t)\le h,\quad \dot{d}(t)\le\mu。\quad(2)$$

饱和函数$\mathrm{sat}(\cdot)$定义为：

$$\mathrm{sat}(\boldsymbol{u}(t))=\left[\mathrm{sat}(u_1(t))\quad \mathrm{sat}(u_2(t))\ \cdots\ \mathrm{sat}(u_m(t))\right],$$

$$\mathrm{sat}(u_i(t))=\begin{cases}\underline{u}_i, & u_i(t)\le\underline{u}_i<0;\\ u_i(t), & \underline{u}_i\le u_i(t)\le\bar{u}_i;\\ \bar{u}_i, & 0<\bar{u}_i\le u_i(t)。\end{cases}$$

引入状态反馈：

$$\boldsymbol{u}(t)=2\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t),\quad(3)$$

则式（1）的闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_K\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-d(t))+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}(t),\quad(4)$$

其中$\boldsymbol{A}_K=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{\eta}(t)=\mathrm{sat}(2\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$，满足

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\eta}(t)\le\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)。\quad(5)$$

本文讨论的主要问题是：寻求形如式（3）所示的控制器，使得闭环系统（4）渐近稳定的时滞相关条件，并给出控制器的设计方法。

2 主要结果

先考虑控制器矩阵$\boldsymbol{K}$给定的情形，对于系统（4），有定理1。

定理1 给定标量$h>0$, μ和控制器矩阵$\boldsymbol{K}$，如果存在$\boldsymbol{P}>0$, $\boldsymbol{Q}>0$, $\boldsymbol{R}>0$, $\boldsymbol{Z}>0$，以及任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{H}_i$, $i=1,2$，标量$\varepsilon>0$，使得以下LMI成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} & -\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{PB} & -h\boldsymbol{G}_1 & h\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} & \varepsilon\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\\ * & \boldsymbol{\Phi}_{22} & -\boldsymbol{H}_2 & 0 & -h\boldsymbol{G}_2 & h\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} & 0\\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & h\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{Z} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h\boldsymbol{Z} & 0\\ * & * & * & * & * & * & \varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0,\quad(6)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} & -\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{PB} & -h\boldsymbol{H}_1 & h\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} & \varepsilon\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\\ * & \boldsymbol{\Phi}_{22} & -\boldsymbol{H}_2 & 0 & -h\boldsymbol{H}_2 & h\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} & 0\\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 & h\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{Z} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h\boldsymbol{Z} & 0\\ * & * & * & * & * & * & \varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0,\quad(7)$$

式中：

$$\boldsymbol{\Phi}_{11}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_K+\boldsymbol{A}_K^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{12}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{H}_1,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{22}=-(1-\mu)\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{G}_2-\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}},$$

则满足时滞约束（2）的闭环系统（4）在给定控制器（3）的作用下渐近稳定。

证明 取Lyapunov-Krasovskii泛函：

$$V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,\quad(8)$$

这里$\boldsymbol{P}>0$, $\boldsymbol{Q}>0$, $\boldsymbol{R}>0$, $\boldsymbol{Z}>0$为待定矩阵。求$V(t)$沿系统（5）的导数，有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t-h)-\\&(1-\dot{d}(t))\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-d(t))-\\&\int_{t-d(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathbf{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathbf{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\end{aligned}\quad(9)$$

由牛顿—莱布尼茨公式可知，对于任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{H}_i$, $i=1,2$，以下式子成立：

$$0=2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{x}^{T}(t-d(t))\boldsymbol{G}_2\right]\times\left[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right],\quad(10)$$

$$0=2\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{H}_2\right]\times\left[\boldsymbol{x}(t-d(t))-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right]。\quad(11)$$

由式（5）可知，对任意$\varepsilon>0$，有

$$0\le\xi^{\mathrm{T}}(t,s)\mathrm{diag}\left\{\varepsilon\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K},\ 0,\ 0,\ -\varepsilon\boldsymbol{I},\ 0\right\}\xi(t,s),\quad(12)$$

这里，

$$\xi(t,s)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\,\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\,\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\right]^{\mathrm{T}}。$$

将式（10）~（12）右边加到式（9），可得

$$\dot{V}(t)\le\frac{1}{h}\int_{t-d(t)}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t,s)\left[\boldsymbol{\Phi}_1+h\boldsymbol{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Phi}_3\right]\xi(t,s)\mathrm{d}s+\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t-d(t)}\xi^{\mathrm{T}}(t,s)\left[\boldsymbol{\Phi}_2+h\boldsymbol{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}\boldsymbol{\Phi}_3\right]\xi(t,s)\mathrm{d}s,\quad(13)$$

式中：

$$\boldsymbol{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} & -\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{PB} & -h\boldsymbol{G}_1\\ * & \boldsymbol{\Phi}_{22} & -\boldsymbol{H}_2 & 0 & -h\boldsymbol{G}_2\\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{Z}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{11} & \boldsymbol{\Phi}_{12} & -\boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{PB} & -h\boldsymbol{H}_1\\ * & \boldsymbol{\Phi}_{22} & -\boldsymbol{H}_2 & 0 & -h\boldsymbol{H}_2\\ * & * & -\boldsymbol{R} & 0 & 0\\ * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & * & * & -h\boldsymbol{Z}\end{bmatrix};$$

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{11}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_K+\boldsymbol{A}_K{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}。$$

若$\boldsymbol{\Phi}_1+h\boldsymbol{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Phi}_3<0$和$\boldsymbol{\Phi}_2+h\boldsymbol{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Phi}_3<0$，则$\dot{V}(t)<0$，由Lyapunov稳定性定理可知，闭环系统（4）渐近稳定。由Schur补可知[15] $\boldsymbol{\Phi}_1+h\boldsymbol{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Phi}_3<0$和$\boldsymbol{\Phi}_2+h\boldsymbol{\Phi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Phi}_3<0$分别等价于式（6）和（7）。定理证明完毕。

下面给出控制器增益矩阵$\boldsymbol{K}$的设计方法。令$\boldsymbol{T}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}^{-1}\ \boldsymbol{P}^{-1}\ \boldsymbol{P}^{-1}\ \boldsymbol{I}\ \boldsymbol{P}^{-1}\ \boldsymbol{Z}^{-1}\ \mu^{-1}\}$，对式（6）和（7）分别左乘$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$和右乘$\boldsymbol{T}$，令$\bar{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{P}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{P}^{-1},\bar{\varepsilon}=\varepsilon^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Z}^{-1},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^{-1},\bar{\boldsymbol{G}}_i=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{P}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{H}}_i=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{P}^{-1},i=1,2$，有以下定理：

定理2　给定标量$h>0,\mu$，如果存在$\bar{\boldsymbol{P}}>0$，$\bar{\boldsymbol{Q}}>0,\bar{\boldsymbol{R}}>0,\bar{\boldsymbol{Z}}>0$以及任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{Y}$，$\bar{\boldsymbol{G}}_i,\bar{\boldsymbol{H}}_i,i$=1, 2，标量$\bar{\varepsilon}>0$，使得以下不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{11} & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12} & -\bar{\boldsymbol{H}}_1 & \bar{\varepsilon}\boldsymbol{B} & -h\bar{\boldsymbol{G}}_1 & \boldsymbol{\Omega}_{16} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\\ * & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{22} & -\bar{\boldsymbol{H}}_2 & 0 & -h\bar{\boldsymbol{G}}_2 & h\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & -\bar{\boldsymbol{R}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I} & 0 & h\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & * & -h\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}^{-1}\bar{\boldsymbol{P}} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h\bar{\boldsymbol{Z}} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \qquad (14)$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{11} & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12} & -\bar{\boldsymbol{H}}_1 & \bar{\varepsilon}\boldsymbol{B} & -h\bar{\boldsymbol{H}}_1 & \boldsymbol{\Omega}_{16} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\\ * & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{22} & -\bar{\boldsymbol{H}}_2 & 0 & -h\bar{\boldsymbol{H}}_2 & h\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & -\bar{\boldsymbol{R}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I} & 0 & h\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & * & -h\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}^{-1}\bar{\boldsymbol{P}} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h\bar{\boldsymbol{Z}} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \qquad (15)$$

式中：

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{11}=\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{P}}+\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{Q}}+\bar{\boldsymbol{R}}+\bar{\boldsymbol{G}}_1+\bar{\boldsymbol{G}}_1^{\mathrm{T}};$$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12}=\boldsymbol{A}_1\bar{\boldsymbol{P}}+\bar{\boldsymbol{G}}_2^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{G}}_1+\bar{\boldsymbol{H}}_1;$$

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{22}=-(1-\mu)\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{G}}_2-\bar{\boldsymbol{G}}_2^{\mathrm{T}}+\bar{\boldsymbol{H}}_2+\bar{\boldsymbol{H}}_2^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{16}=h\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}。$$

则满足时滞约束（2）的闭环系统（4）在控制器（3）的作用下渐近稳定，且$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}$。

定理2给出了控制器的设计方法，但由于矩阵不等式（14）和（15）含有非线性项$-\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}$，不能用数值法直接求解。注意到对于任意$\bar{\boldsymbol{Z}}>0$，有$(\bar{\boldsymbol{Z}}-\bar{\boldsymbol{P}})\bar{\boldsymbol{Z}}^{-1}(\bar{\boldsymbol{Z}}-\bar{\boldsymbol{P}})\geq 0$，即

$$\bar{\boldsymbol{Z}}-2\bar{\boldsymbol{P}}\geq-\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}, \qquad (16)$$

因此，对于任意$\lambda>0$，有

$$-\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{Z}}^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}=-\lambda\bar{\boldsymbol{P}}(\lambda\bar{\boldsymbol{Z}})^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}\leq\lambda^2\bar{\boldsymbol{Z}}-2\lambda\bar{\boldsymbol{P}}。 \qquad (17)$$

利用式（18），有如下定理：

定理3　给定标量$\lambda>0$, $h>0$, μ，如果存在$\bar{\boldsymbol{P}}>0$，$\bar{\boldsymbol{Q}}>0,\bar{\boldsymbol{R}}>0,\bar{\boldsymbol{Z}}>0$，以及任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{Y}$，$\bar{\boldsymbol{G}}_i,\bar{\boldsymbol{H}}_i,i$=1, 2，标量$\bar{\varepsilon}>0$，使得以下不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{11} & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12} & -\bar{\boldsymbol{H}}_1 & \bar{\varepsilon}\boldsymbol{B} & -h\bar{\boldsymbol{G}}_1 & \boldsymbol{\Omega}_{16} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\\ * & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{22} & -\bar{\boldsymbol{H}}_2 & 0 & -h\bar{\boldsymbol{G}}_2 & h\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & -\bar{\boldsymbol{R}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I} & 0 & h\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & * & \lambda^2h\bar{\boldsymbol{Z}}-2\lambda h\bar{\boldsymbol{P}} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h\bar{\boldsymbol{Z}} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \qquad (18)$$

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{11} & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12} & -\bar{\boldsymbol{H}}_1 & \bar{\varepsilon}\boldsymbol{B} & -h\bar{\boldsymbol{H}}_1 & \boldsymbol{\Omega}_{16} & \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\\ * & \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{22} & -\bar{\boldsymbol{H}}_2 & 0 & -h\bar{\boldsymbol{H}}_2 & h\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & -\bar{\boldsymbol{R}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I} & 0 & h\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & * & \lambda^2h\bar{\boldsymbol{Z}}-2\lambda h\bar{\boldsymbol{P}} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -h\bar{\boldsymbol{Z}} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\varepsilon}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \qquad (19)$$

其中$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{11},\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{12},\bar{\boldsymbol{\Phi}}_{22}$定义于定理2，则满足时滞约束（2）的闭环系统（4）在控制器（3）的作用下渐近稳定，且$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}$。

3　数值例子

考虑含输入饱和的时滞系统具有如下参数：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.8 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{sat}(u_j(t))=\mathrm{sign}(u_j(t))\min(1,|u_j(t)|)。$$

利用定理3，取λ=0.2，当μ=0时，得到的保证系统稳定的最大时滞界限$h\leq 4.999\ 8$，相应的控制器$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.041\,0 & -0.038\,2\\ -0.021\,1 & 0.117\,1\end{bmatrix}$；当$\mu\geq 1$时，得到的最大时滞界限$h\leq 1.893\ 5$，相应的控制器$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.014\,2 & 0\\ -0.025\,0 & 0\end{bmatrix}$，而文献[13]得到保证系统稳定的最大时滞界限$h\leq 0.615\ 3$。可见本文得出的结果具有较小的保守性。

4　结语

本文讨论具有输入饱和的时滞系统的时滞相关稳定与镇定问题，利用改进的自由权矩阵方法，获得了基于LMI的时滞相关稳定化条件，同时给出了无记忆

状态反馈控制器的设计方法。最后，数值实例表明了所提方法的有效性。

参考文献：

[1] Niculescu S. Delay Effects on Stability：A Robust Control Approach[M]. London：Springer-Verlag，2001.

[2] Gu K，Kharitonov L，Chen J. Stability of Time-Delay Systems[M]. Boston：Birkhauser，2003.

[3] Richard J. Time-Delay Systems：An Overview of Some Recent Advances and Open Problem[J]. Automatic，2003，39：1667-1694.

[4] He Y，Wu M，She J H，et al. Delay-Dependent Robust Stability Criteria for Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays[J]. System and Control Letters，2004，51(1)：57-65.

[5] He Y，Wang Q G.，Xie L H，et al. Further Improvement of Free-Weighting Matrices Technique for Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Trans. on Automat. Contr.，2007，52(2)：293-299.

[6] 曾红兵，何 勇，吴 敏，等. 时变时滞Lurie非线性系统绝对稳定新判据[J]. 控制与决策，2010，25(3)：346-350.
Zeng Hongbing，He Yong，Wu Min，et al. New Absolute Stability Criteria for Lurie Nonlinear Systems with Time-Varying Delay[J]. Control and Decision，2010，25(3)：346-350.

[7] 王 炜，曾红兵. 不确定线性采样系统鲁棒稳定性[J]. 湖南工业大学学报，2010，24(4)：79-81.
Wang Wei，Zeng Hongbing. Robust Stability of Uncertain Linear Sampled-Data Systems[J]. Journal of Hunan University of Technology，2010，24(4)：79-81.

[8] Fridman E，Shaked U. Delay-Dependent Stability and H∞ Control：Constant and Time-Varying Delays[J]. International Journal of Control，2003，76(1)：48-60.

[9] Park P，Ko J W. Stability and Robust Stability for Systems with a Time-Varying Delay[J]. Automatica，2007，43(10)：1855-1858.

[10] Cao Y Y，Lin Z L，Hu T S. Stability Analysis of Linear Time-Delay Systems Subject to Input Saturation[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems-I，2002，49(2)：233-240.

[11] Tarbouriech S，Garcia G，Gomes J M. Robust Stability of Uncertain Polytopic Linear Time-Delay Systems with Saturating Inputs：An LMI Approach[J]. Computers and Electrical Engineering，2002，28(3)：157-169.

[12] Zhang L，Boukas El，Haidar A. Delay-Range-Dependent Control Synthesis for Time-Delay Systems with Actuator Saturation[J]. Automatica，2008，44(10)：2691-2695.

[13] Su H Y，Liu F，Chu J. Robust Stabilization of Uncertain Time-Delay Systems Containing Saturating Actuators[J]. IEEE Proceeding-Control Theory and Application. 2001，148(4)：323-328.

[14] 张先明，吴 敏，佘锦华. 含饱和驱动的线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定化[J]. 控制理论与应用，2005，22(6)：991-994.
Zhang XianMing，Wu Min，She JinHua. Delay-Dependent Robust Stabilization of Uncertain Linear Time-Varying Delay Systems Containing Saturating Actuators[J]. Journal of Control Theory and Application，2005，22(6)：991-994.

[15] Boyd S，El Ghaoui L，Feron E，et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control[M]. Philadelphia：SIAM，1994.

（责任编辑：罗立宇）