求解无功优化的线性规划最钝角松弛法

李展鹏[1]，刘明波[2]

（1. 佛山市顺德电力设计院有限公司 广东 佛山 528300；2. 华南理工大学 电力学院 广东 广州 510640）

摘　要：采用最钝角松弛算法求解无功优化问题的线性规划模型，为解决线性化步长调整问题在该模型中增加了信赖域约束。首先，根据最钝角原理定义主元标的概念及其计算公式，计算各个不等式约束的主元标。然后，根据不等式约束的主元标值对其进行筛选，形成一个松弛的线性规划问题，用原始单纯形法对其求解。如果松弛问题的最优解能满足原问题的不等式约束，则直接获得原问题的最优解。否则，将所有剩余的约束条件全部添加到松弛模型中，得到改变约束条件顺序后的原问题，再用对偶单纯形法进行新的求解。该算法本质上是一种2阶段单纯形法，并且第二阶段的求解可以充分利用第一阶段松弛问题的解信息，大大提高第二阶段的计算效率。以5个试验系统和1个省级538节点实际系统为测试系统，通过与单纯形法、信赖域内点法进行比较，验证其有效性。

关键词：无功优化；线性规划；信赖域；单纯形法；最钝角松弛算法

中图分类号：TM715　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)01-0053-06

A Most-Obtuse-Angle Relaxation Algorithm for Solution of Linear Programming Model of Reactive-Power Optimization Problem

Li Zhanpeng[1]，Liu Mingbo[2]

（1. Shunde Electric Power Design Institute Co. Ltd. Foshan，Foshan Guangdong 528300，China;
2. School of Electric Power Engineering，South China University of Technology，Guangzhou 510640，China）

Abstract：Linear programming (LP) model of reactive-power optimization problem is solved by the most-obtuse-angle relaxation algorithm (MRA), in which trust region constraints on linear step sizes are added. Firstly，the concept of pivoting indices and its calculation formulae are defined according to most-obtuse-angle principle, and pivoting indices corresponding to inequality constraints are computed. Then inequality constraints in the original LP model are filtered based on these values of pivoting indices and a relaxed LP model is established. This relaxed model is solved by primal simplex method. If this solution from the relaxed model satisfies inequality constraints of the original LP model, the solution is final result expected. Otherwise，all the remaining inequality constraints in the relaxed LP model are added into the relaxed model to obtain the original model with changed order of inequality constraints. This original model is solved by dual simplex method. In essence, the MRA is a two-phase simplex method. Also solution in phase II can utilize solution obtained in phase I fully and hence computation efficiency is enhanced obviously. Results on five test systems and a 538-bus real system demonstrate effectiveness of the proposed algorithm by comparisons with simplex method and trust-region interior-point method.

Keywords：reactive-power optimization；linear programming；trust region；simplex method；most-obtuse-angle relaxation algorithm

---

收稿日期：2010-11-02

基金项目：国家自然科学基金资助项目（50777021）

作者简介：李展鹏（1982-），男，广东顺德人，工程师，硕士，主要研究方向为电力系统优化，运行与控制，
E-mail：hellojerry2001@163.com

通信作者：刘明波（1964-），男，湖南临澧人，华南理工大学教授，博士生导师，主要研究方向为电力系统优化，运行与控制，
E-mail：epmbliu@scut.edu.cn

0　引言

自Maliszewki等1968年应用线性规划（linear programming，LP）方法求解无功优化问题以来[1]，该方法在最优潮流或无功优化计算中得到了广泛的应用。大量研究表明[2-7]，线性规划法具有数据稳定、收敛可靠和计算速度快等优点，而且理论上比较成熟。求解LP模型的主要方法可以归为2类：单纯形法和内点法。内点法具有对问题规模不敏感以及计算速度快等特点，在求解大规模LP问题时表现出明显的优越性，并且，将信赖域思想和内点法结合较成功地解决了优化过程中步长调整这一难题[8-11]。

此外，在单纯形法领域中的研究也取得了重要进展[12-15]。对于大规模LP问题，为进一步减少迭代次数和提高计算效率，一个可行的思路就是采用松弛算法，其基本思想是：先取其中一部分约束条件形成规模较小的子问题进行求解，得到最优解之后判断其是否为原问题的最优解；若不是，就更换一些约束再次求解，如此重复直至求出原问题的最优解为止。如果选取约束时能够预先判断哪些约束是最优解处的积极约束，哪些是非积极约束，则在原LP问题中只考虑积极约束，就可以直接求得原问题的最优解，这样可以大大减少约束选择的盲目性。因此，实现松弛算法的关键是如何有效选取积极约束。对于该问题的探讨，很多学者都提出了自己的想法，并取得一定的成果。文献[12-15]提出了最优基的启发式特征刻划思想，即最钝角原理（most-obtuse-angle principle），引入反映目标梯度与约束梯度夹角大小的主元标作为确定略去或保留约束的依据。而最钝角松弛算法（most-obtuse-angle relaxation algorithm，MRA）正是以此为出发点而提出来的松弛算法，MRA属于单纯形类算法，采用主元标对原LP问题进行有效约束筛选，从而构成一个规模较小的LP问题。

本文尝试将最钝角松弛算法应用于求解无功优化LP模型，并与常规单纯形法、内点法进行了详细比较。

1　无功优化问题的信赖域LP模型及求解步骤

无功优化问题的原始模型可以用如下非线性规划模型描述：

$$\min \quad P_L(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u}), \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad g(\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})=0, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{z}_{\min}\le \boldsymbol{z}\le \boldsymbol{z}_{\max}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}_{\min}<\boldsymbol{u}<\boldsymbol{u}_{\max}, \tag{4}$$

式中：P_L为有功网损；$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_G^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_C^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_B^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$为控制变量列向量；$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_G^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{V}_D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$为状态变量列向量；下标max和min表示变量的上、下限；$\boldsymbol{Q}_G$为发电机无功出力列向量；$\boldsymbol{V}_D$为负荷节点电压列向量；$\boldsymbol{V}_G$为发电机机端电压列向量；$\boldsymbol{Q}_C$为无功补偿设备出力列向量；$\boldsymbol{T}_B$为可调变压器变比列向量；等式约束（2）为潮流方程。

在当前运行点$(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{z}_0)$处，将非线性规划模型（1）~（4）线性化，得：

$$\min \quad \boldsymbol{c}_p^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u}, \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{u}_{\min}-\boldsymbol{u}_0\le\Delta\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{u}_{\max}-\boldsymbol{u}_0, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{z}_{\min}-\boldsymbol{z}_0\le\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{z}_{\max}-\boldsymbol{z}_0, \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}\partial\boldsymbol{P}_L/\partial\boldsymbol{V}_G & \partial\boldsymbol{P}_L/\partial\boldsymbol{Q}_C & \partial\boldsymbol{P}_L/\partial\boldsymbol{T}_B\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，为网损对控制变量的灵敏度系数；矩阵$\boldsymbol{S}$为状态变量对控制变量的相对灵敏度系数矩阵，

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{Q}_G}{\partial\boldsymbol{V}_G} & \dfrac{\partial\boldsymbol{Q}_G}{\partial\boldsymbol{Q}_C} & \dfrac{\partial\boldsymbol{Q}_G}{\partial\boldsymbol{T}_B}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{V}_D}{\partial\boldsymbol{V}_G} & \dfrac{\partial\boldsymbol{V}_D}{\partial\boldsymbol{Q}_C} & \dfrac{\partial\boldsymbol{V}_D}{\partial\boldsymbol{T}_B}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

矩阵$\boldsymbol{S}$的计算可采用文献[16]中的直接雅可比矩阵变换方法。

对式（2）线性化后，得到反映状态变量和控制变量之间的增量关系：

$$\Delta\boldsymbol{z}=\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{u}。 \tag{9}$$

为保证LP模型（5）~（7）逼近非线性模型（1）~（4）更有效，本文采用了文献[9]的信赖域动态调整步长策略，即在线性化模型（5）~（7）中增加相应的约束条件：

$$\|\Delta\boldsymbol{u}\|_\infty\le\Delta_k, \tag{10}$$

其中，Δ_k为信赖域步长约束，其具体计算方法可见文献[9]。

对于上述带信赖域约束的无功优化LP问题，其具体计算步骤如下：

1）设定初始参数，如控制变量初值$\boldsymbol{u}_0$，初始信赖域步长约束Δ_0，信赖域调整参数ρ_1，ρ_2，ρ_3与罚因子σ。

2）进行潮流计算，计算各节点电压及系统功率分布。

3）判别收敛性：若约束条件满足，且网损变化值小于收敛精度ε_1，则输出最优解，计算终止；否则，转第4步。

4）求取相对灵敏度系数矩阵和损耗灵敏度系数，建立带信赖域的LP问题；求解LP问题，求出控制变量增量$\Delta\boldsymbol{u}^k$。

5）修正信赖域步长约束Δ_k，置$k=k+1$，转第2步。

具体的参数（$\Delta_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$和罚因子$\sigma$）设定将在算例分析中给出。

2　最钝角原理

重写带信赖域约束的LP模型（5）~（7）和（10）如下：

$$\min \quad \boldsymbol{c}_p^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{u}, \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{u}_{\min}-\boldsymbol{u}_0 \le \Delta\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{u}_{\max}-\boldsymbol{u}_0, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{z}_{\min}-\boldsymbol{z}_0 \le \boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{z}_{\max}-\boldsymbol{z}_0, \tag{13}$$

$$\|\Delta\boldsymbol{u}\|_\infty \le \Delta_k。 \tag{14}$$

通过适当变形，总可以将式（11）~（14）表示的线性化模型转换成如下标准形式的LP问题：

$$\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b_i, \quad i=1,2,\cdots,\mathrm{m}, \tag{16}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2,\cdots,n。 \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{a}_i$为n维列向量，$b_i \ge 0$。

从几何上讲，LP问题（15）~（17）的可行域构成一多胞形。单纯形算法就是从多胞形的某一个顶点出发，沿着下降（上升）边的方向到达相邻的另一个顶点，这样迭代下去，直到得到最优值为止。其中，边方向（搜索方向）的确定，也即主元规则的选择是算法中最为关键的环节。好的主元规则可以减少退化，以较少的迭代次数和运算时间便可达到最优。反之，则有可能造成算法长时间在某一个顶点处停滞不前，使算法的效率大为降低，甚至有可能会产生循环，使算法失败。在许多可以进基和出基的变量中，如果存在一个理想的主元规则，那它应该能够辨别和选择一个最优基变量进基或一个最优非基变量出基。最钝角原理，即最优基的启发式特征刻划，就是为改进这一主元选择规则而提出的一种新思路。

定义LP问题（15）~（17）的主元标β_j为：

$$\beta_j=\begin{cases} \boldsymbol{c}_j, & j=1,2,\cdots,n; \\ \dfrac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{j-n}}{\|\boldsymbol{a}_{j-n}\|_2}, & j=n+1,n+2,\cdots,n+m \end{cases}。 \tag{18}$$

式（18）中定义的主元标具有明确的几何意义。因为$\beta_j/\|\boldsymbol{c}\|_2$正好等于目标函数的梯度与第$j$个不等式约束

$$\begin{cases} x_j \ge 0, & j=1,2,\cdots,n; \\ \boldsymbol{a}_{j-n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b_{j-n}, & j=n+1,n+2,\cdots,n+m \end{cases} \tag{19}$$

左端函数梯度夹角的余弦，因此，主元标β_j就与各个不等式约束建立起了对应的关系。主元标β_j也可称为第j个不等式约束的主元标。

最钝角原理可以概括为：约束条件函数的梯度与目标函数的梯度成钝角方向的约束在目标函数接近最优时都将变为积极的约束。也就是说，该约束的主元标β_j的值为负。

文献[12]给出了最钝角原理中最优基启发性特征刻划的详细数学描述，并且得出了以下2个重要的结论：

1）LP问题（15）~（17）的最优基变量具有较大的主元标，而其非最优基变量具有较小的主元标。

2）如果LP问题存在一个最优解，则在最优解处变为积极约束条件的主元标中，至少有一个是负的。

对最钝角原理，可以进行这样简单的理解。$\boldsymbol{f}$表示的是目标函数的梯度，$\boldsymbol{g}_i$表示的是第i个不等式约束的梯度，当约束的主元标为正，即$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}_i$的夹角为锐角时，则优化过程中约束的变化方向与目标函数的方向是相同的；当约束的主元标为负，即$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{g}_i$的夹角为钝角时，则约束的变化方向与目标函数的方向是相反的。即随着目标函数越趋近最优值，与目标函数梯度所成角度越大的约束会越逼近到它的限值上。

3　最钝角松弛算法

在本文中，对于标准形式的LP问题（15）~（17），笔者仅对其函数不等式约束（16）定义主元标。根据最钝角原理及其结论2，笔者把所有主元标小于δ(δ为一较小的正数)，即与目标函数梯度夹角较大的约束条件都筛选出来，得到如下松弛问题：

$$\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \tag{20}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b_i \quad (i\in R), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{x} \ge 0, \tag{22}$$

其中，$R \subseteq A$，$A=\{1,2,\cdots,m\}$。

在实际应用中，可以通过调整δ的大小，对不等式约束（21）进行调控。

应用最钝角松弛算法（MRA）求解LP问题的步骤如下：

1）根据式（18）计算不等式约束（16）的主元标β_j，然后按照$N=\{i \mid \beta_i<\delta \mid i=1,2,\cdots,m\}$，把需要考虑的约束挑选出来，形成松弛模型（20）~（22）。

2）应用原始单纯形法求解模型（20）~（22），若其无解，则原问题无解，停止；否则设其最优解为$\boldsymbol{x}^R$，若其无界，则求解如下新松弛模型，得最优解$\boldsymbol{x}^R$：

$$\min \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \tag{23}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b_i \quad (i\in R), \tag{24}$$

$$\boldsymbol{x} \ge 0, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le M, \tag{26}$$

其中，M为一个充分大的数。

3）若x^R满足不等式约束（16），则x^R也为原问题（15）~（17）的最优解，停止计算；否则转下一步。

4）将所有剩余的约束条件（用主元标过滤掉的那些约束）全部添加到松弛模型（20）~（22），进行新的求解，也就是用对偶单纯形法对改变约束条件顺序后的原问题进行求解。

在上述计算过程中，在松弛模型（20）~（22）无界的情况下，需要再求解新的松弛模型（23）~（26）。根据文献[15]的研究，在解前者的基础上只需一步便可获得后者的最优解。

MRA算法从总体上可分为2个阶段，在第一阶段求解一个松弛模型（20）~（22）或（23）~（26），在第二阶段求出原问题的最优解。所以，此算法可以认为是一种新的求解LP问题的2阶段单纯形法。在第一阶段对松弛问题求解结束后，因检验向量是非负并且不变的（对于加入剩余约束后的原问题而言，松弛问题的解为其对偶可行基本解），因此，在第二阶段求解改变约束顺序后的原问题时，可以利用松弛问题求得的最优基信息，采用对偶单纯形法来求解即可。具体做法是：在松弛问题的最终单纯形表基础上，加入剩余约束的数据，通过矩阵的初等变换，把原问题最终单纯形表上的各基向量列及新增加列化为单位矩阵，然后用对偶单纯形法求解。采用这种处理方法能利用上一步松弛问题的解信息，大大提高第二阶段问题求解的效率。具体求解思路可见文献[15]。

4 算例分析

为验证所提算法求解无功优化问题的有效性，本文对6个系统进行了计算，如表1~3。它们分别是：Ward & Hale 6节点系统，IEEE 14节点、30节点、118节点系统，某538节点省级系统，由9个IEEE 118节点系统构成的1 062节点系统。其中，538节点系统包括48台发电机、118个无功补偿设备和64台可调变压器，1 062节点系统包括324台发电机、90个无功补偿设备和81台可调变压器。功率基准值为S_B = 100 MW。优化收敛的条件为：相邻两次主迭代的网损偏差小于$\varepsilon_1(10^{-3})$，各变量均在规定的上下限值内。潮流计算收敛条件为：最大潮流偏差小于$\varepsilon_2(10^{-4})$。程序运行在2.0 GHz，256 M内存的Pentinm 4上。

对于信赖域步长的调整，Δ_0=0.2，ρ_1=0.5，ρ_2=0.6，ρ_3=0.8，罚因子σ=10。在MRA中，设定δ=0.05。

表1 由MRA与单纯形法得到的优化结果比较

Table 1 Comparison of optimization results obtained from MRA and simplex method

测试系统	主迭代次数/总子迭代次数		网损/V		总计算时间/s	
	单纯形法	MRA	单纯形法	MRA	单纯形法	MRA
6节点	5/29	5/29	0.088 93	0.088 93	1.53	1.42
14节点	7/73	7/72	0.138 54	0.138 54	2.95	2.52
30节点	13/266	13/255	0.077 11	0.077 09	4.58	4.28
118节点	11/879	11/879	1.187 71	1.187 71	5.97	5.95
538节点	7/3 012	7/2 824	1.515 91	1.515 65	129.42	100.11
1 062节点	26/15 880	26/15 880	10.671 622	10.671 62	2 203.50	2 004.72

注 表中的MRA算法的子迭代次数是第一阶段与第二阶段换基次数的总和

表2 MRA在各个测试系统中的详细结果

Table 2 Details of MRA in test systems

测试系统	主迭代次数/总子迭代次数	主迭代中第一阶段直接求出最优解的次数	原约束个数	筛选后的平均约束个数	第一阶段求解的总子迭代次数	第二阶段求解的总子迭代次数
6节点	5/29	5	12	8	29	0
14节点	7/72	6	28	240	64	8
30节点	13/255	6	60	52	190	65
118节点	11/879	0	236	184	655	224
538节点	7/2 824	5	1 076	1 040	2 010	814
1 062节点	26/15 880	0	2 124	1 662	12 121	3 759

注 表中的约束个数是指将LP模型转换为标准形式后的约束个数

由表1可知，MRA作为一种改进的单纯形算法，其计算效果优于原来的单纯形算法。为方便进一步分析，表2列出了MRA算法在各个测试系统中的计算结果。从表2可以看出，在第一阶段，MRA所采用的筛选策略效果还是比较理想的，在4个系统中，筛选出来的约束所组成的松弛问题，有半数以上都能直接求得最优解，并不需要求解完整的LP问题，而且约束数目比原问题的少。在第二阶段，由于利用了第一阶段最优基启动的对偶单纯形法，所以，求解原LP的迭代次数并没有明显增多。

MRA优于单纯形法主要体现在2个方面：

1）MRA通过启发式的筛选策略来构造低维问题以达到减少求解原问题迭代次数的目的，迭代次数减少了，就意味着计算时间的减少。

2）由表2可以看出，MRA的大部分迭代都是求解第一阶段的低维松弛问题，低维问题所形成的单纯形表规模本身就比原问题的单纯形表规模要小，即第一阶段松弛问题的每次迭代规模比原问题迭代的规模要小，即使在筛选效果不理想而导致迭代次数没有减少的情况下，其计算的效率仍然比单纯形法高。

表3　由MRA和信赖域内点法得到的优化结果比较

Table 3　Comparison of optimization results obtained from MRA and trust region interior point method

测试系统	主迭代次数/子迭代次数		网损/V		总计算时间/s	
	信赖域内点法	MRA	信赖域内点法	MRA	信赖域内点法	MRA
6节点	6/7	5/6	0.088 95	0.088 93	0.03	1.42
14节点	8/8	7/10	0.138 57	0.138 54	0.06	2.52
30节点	10/12	13/20	0.071 59	0.077 09	0.58	4.28
118节点	11/18	11/80	1.176 88	1.187 71	1.69	5.95
538节点	5/22	7/403	1.518 78	1.515 65	108.53	100.11
1 062节点	7/22	26/611	10.560 86	10.671 622	1 892.46	2 004.72

注　表中内点法的子迭代次数表示的是平均子迭代次数，MRA中的子迭代指的是单纯形法的换基计算

由表3可知，信赖域内点法优于MRA，这是由于内点法是一种多项式时间算法。在538节点和1 062节点系统中，求解LP问题的迭代次数稳定在22次，而且主迭代次数也比单纯形法少，MRA本质上是一种改进的单纯形法。

从表3可以看出，虽然MRA总体上并不优于内点法，但与内点法相比其计算效率的差距已缩小了。对于538节点系统，还出现了略优于内点法的情况。这是因为：

1）538节点系统的筛选效果比较理想，子迭代次数有了明显的减少。

2）对于内点法，子迭代即为内点法的一次迭代计算，随着节点数的增大，其形成和求解修正方程的维数也增大，求解完整的优化过程则需要多次求高阶线性方程组，因此求解时间也显著增加，所以求解大规模高阶线性方程组成为影响其计算效率的重要因素；而MRA的子迭代是单纯形法换入换出基计算，随着系统规模增大，其每次子迭代时间并不会有非常显著的提高，计算时间增多最主要是由于单纯形法本身的迭代次数随着系统规模增大而不断增加的固有缺陷所造成的。

3）在计算过程中发现，随着主迭代次数的增加，信赖域半径也在变小，变量的变化范围也很小，MRA的子迭代次数也在明显减少，也就是很多控制变量不用变化，从而减少了很多换基的迭代计算。对于538节点系统，MRA初始几次迭代都在800多次以上，到最后却稳定在250次左右；而对于1 062节点系统，初始几次迭代都在1 500多次以上，到最后也稳定在500次左右。

5　结论

应用最钝角松弛算法求解无功优化问题的线性规划模型，通过6个系统的优化计算，得出如下结论：

1）根据主元标的大小来筛选线性规划问题不等式约束，简便易行，几何意义明确。

2）总体上讲，MRA优于常规单纯形法，但劣于信赖域内点法。在某些特殊情况下，MRA会略优于信赖域内点法。

参考文献：

[1]　Maliszewki R M，Garverl L，Wood A J. The Linear Programming as an Aid in Planning Kilover Requirements[J]. IEEE Trans on Power Apparatus and System，1968，87(3)：1963-1967.

[2]　Mamandur K R C，Chenoweth R D. Optimal Control of

Reactive Power Flow for Improvements in Voltage Profiles and Real Power Loss Minimization[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and System，1981，100(7)：3185-3194.

[3] Alsac O，Bright J，Prais M，et al. Further Developments in LP-Based Optimal Power Flow[J]. IEEE Transactions on Power Systems，1990，5(3)：697-711.

[4] Quintana V H，Torres G L，Medina Palomo J. Interior-Point Methods and Their Applications to Power Systems： A Classification of Publications and Software Codes[J]. IEEE Transactions on Power Systems，2000，15(1)：170-176.

[5] 刘明波，谢 敏，赵维兴. 大电网最优潮流计算[M]. 北京：科学出版社，2010：18-37.
Liu Mingbo，Xie Min，Zhao Weixin. Optimal Power Flow Computing in Large-Scale Power Systems[M]. Beijing：Science Press，2010：18-37.

[6] 刘明波，程 莹，林声宏. 求解无功优化的内点线性和内点非线性规划方法比较[J]. 电力系统自动化，2002，26(1)：22-26.
Liu Mingbo，Cheng Ying，Lin Shenghong. Comparative Studies of Interior Point Linear Programming and Nonlinear Programming Algorithms for Reactive Power Optimization [J]. Automation of Electric Power Systems，2002，26(1)：22-26.

[7] 李 尹，张伯明，赵晋泉，等. 一种基于扩展线性规划的在线最优潮流方法[J]. 电力系统自动化，2006，30(5)：18-23.
Li Yin，Zhang Boming，Zhao Jinquan，et al. An Online Optimal Power Flow Approach Based on Extended Linear Programming[J]. Automation of Electric Power Systems，2006，30(5)：18-23.

[8] 袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京：科学出版社，1999：559-598.
Yuan Yaxiang，Sun Wenyu. Optimization Theory and Methods[M]. Beijing：Science Press，1999：559-598.

[9] 刘盛松，侯志检，蒋传文. 基于信赖域内点法的最优潮流算法[J]. 电力系统自动化，2003，27(6)：26-30.
Liu Shengsong，Hou Zhijian，Jiang Chuanwen. A Trust Region Interior Point Method Based Optimal Power Flow Algorithm [J]. Automation of Electric Power Systems，2003，27 (6)：26-30.

[10] 陈 吉，韦 化. 改进的信赖域内点算法在OPF中的应用[J]. 现代电力，2005，22(6)：13-17.
Chen Ji，Wei Hua. Application of an Improved Trust Region Interior Point Algorithm in OPF[J]. Modern Electric Power，2005，22 (6)：13-17.

[11] 李玉龙，宗 伟，秦立军. 电力系统无功优化线性规划问题中线性步长的动态调整策略[J]. 电网技术，2006，30(18)：40-44.
Li Yulong，Zong Wei，Qin Lijun. A New Strategy of Dynamically Adjusting Step Size in Linear Programming Model for Power Systems Reactive Power Optimization[J]. Power Systems Technology 2006，30(18)：40-44.

[12] Pan Pingqi. Practical Finite Pivoting Rules for the Simplex Method[J]. Operational Research Spektrum，1990，12：219-225.

[13] Pan Pingqi. The Most-Obtuse-Angle Row Pivot Rule for Achieving Dual Feasibility：A Computational Study[J]. European Journal of Operational Research，1997，101(1)：164-176.

[14] 潘平奇，李 炜，王 涌. 基于最钝角规则的亏基对偶单纯形 I 阶段算法[J]. 运筹学学报，2004，8(2)：88-96.
Pan Pingqi，Li Wei，Wang Yong. A Phase-I Algorithm Using the Most-Obtuse-Angle Rule for the Basis-Deficiendy-Allowing Dual Simplex Method[J]. Operations Research Transactions，2004，8(2)：88-96.

[15] 周志娟. 线性规划的最钝角松弛算法[D]. 南京：东南大学，2005.
Zhou Zhijuan. The Most-Obtuse-Angle Relaxation Algorithm for Linear Programming[D]. Nanjing：South East University，2005.

[16] 刘明波，陈学军，程劲晖. 三种无功优化线性规划建模方法的比较[J]. 电力系统及其自动化学报，1999，11(2)：31-36.
Liu Mingbo，Chen Xuejun，Cheng Jinhui. Comparison of Three Methods for Establishing Linear Programming Model of Reactive Power Optimization[J]. Proceedings of the CSU-EPSA. 1999，11(2)：31-36.

（责任编辑：罗立宇）