第25卷第1期 湖南工业大学学报 Vol.25 No.1
2011年1月 Journal of Hunan University of Technology Jan. 2011

基于内点算法的半定规划灵敏度分析

李光荣[1]，成央金[1]，朱六清[2]，陈　峰[1]

（1. 湘潭大学 数学与计算科学学院 湖南 湘潭 411105；2. 湖南涉外经济学院 湖南 长沙 410205）

摘　要：半定规划是线性规划的推广，内点算法是目前最有效的求解半定规划算法。研究了基于内点算法的半定规划的灵敏度分析，即右端向量和费用矩阵变化时对可行解的影响，并给出了在单步内点迭代时，保持可行域内和近似最优解时的参数变化的界限，以及一般情形的ε灵敏度分析。

关键词：半定规划；内点算法；灵敏度分析

中图分类号：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)01-0045-05

Sensitivity Analysis in Semidefinite Programming Based on Interior-Point Methods

Li Guangrong[1]，Cheng Yangjin[1]，Zhu Liuqing[2]，Chen feng[1]

（1. School of Mathematics and Computational Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China；
2. Hunan International Economics University，Changsha 410105，China）

Abstract：Semidefinite programming(SDP) is an extension of linear programming, and the interior-point algorithm is the most effective method for semidefinite programming. Studies semidefinite programming sensitivity analysis based on interior point algorithm, that is perturbations impacts of right-end vector and cost matrix on practical solutions. And in the single-step interior point iteration presents the parameters of the boundaries at practical domain and approximate optimal solution and the general conditions of ε sensitivity analysis.

Keywords：semidefinite programming; interior-point method; sensitivity analysis

1　背景知识

半定规划是特殊的凸规划，其可行域是半正定锥的仿射子空间，它是线性规划的推广。20世纪90年代以来，半定规划的算法迅速发展，在控制论、系统论、组合优化、移动通信等领域有广泛的应用。

在本文中，用$\mathbf{R}^m$表示m维欧氏空间；S^n, S^n_+, S^n_{++}分别表示n阶对称矩阵、对称半正定矩阵及对称正定矩阵的集合；$\boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{0}(\boldsymbol{X}\succ\boldsymbol{0})$表示$\boldsymbol{X}\in S^n_+\left(\boldsymbol{X}\in S^n_{++}\right)$；“•”表示Frobenius内积，即$\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{X}=<\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}>=\mathrm{Trace}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)$，其中$\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}$同型，$\mathrm{Trace}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)$表示矩阵$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$的迹；$\lambda_{\max}(\boldsymbol{Z})$，$\lambda_{\min}(\boldsymbol{Z})$分别表示矩阵$\boldsymbol{Z}$最大及最小的特征值。

半定规划的标准形式及其对偶形式[1]如下：

$$\begin{aligned}&\min \boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{X},\\ \text{(PSDP)}\ \ &\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{A}_i\bullet\boldsymbol{X}=b_i,\ i=1,2,\cdots,m,\\ &\boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{0};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ \text{(DSDP)}\ \ &\text{s.t.}\ \ \sum_{i=1}^{m}y_i\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C},\\ &\boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0};\end{aligned}$$

收稿日期：2010-11-04
作者简介：李光荣（1983-），男，重庆酉阳人，湘潭大学硕士研究生，主要研究方向为半定规划及其应用，
E-mail：honourlee@126.com

式中：$b_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，$y_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$为实数；

$\boldsymbol{b}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_m\right)$，$\boldsymbol{y}=\left(y_1,y_2,\cdots,y_m\right)$；

$\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{Z}$为$n\times n$的实矩阵。

不失一般性，不妨假设$\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}_i\in S^n$，否则令$\boldsymbol{C}=\left(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\right)/2$，$\boldsymbol{A}_i=\left(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\right)/2$，$i=1,2,\cdots,m$即可。

引入线性算子$A:S^n\rightarrow\mathbf{R}^m$定义为

$$A\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\bullet\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{A}_2\bullet\boldsymbol{X}\\\vdots\\\boldsymbol{A}_m\bullet\boldsymbol{X}\end{pmatrix};$$

再引入A的伴随算子$A^T:\mathbf{R}^m\rightarrow S^n$定义为

$$A^T\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{A}_i,$$

式中：$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m$。

因此，半定规划（PSDP）及其对偶规划（DSDP）可转化为下述等价形式：

$$\text{(PSDP)}\quad \begin{aligned}&\min \boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{X},\\ &\text{s.t.}\quad A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\\ &\boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{0};\end{aligned}$$

$$\text{(DSDP)}\quad \begin{aligned}&\max \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ &\text{s.t.}\quad A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C},\\ &\boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0}。\end{aligned}$$

可以证明，对偶规划也是半定规划。

半定规划的KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件为：

$$\begin{cases}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\succ\boldsymbol{0};\\A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C},\boldsymbol{Z}\succ\boldsymbol{0};\\\boldsymbol{XZ}=\mu\boldsymbol{I}。\end{cases}\tag{1}$$

式中：μ是正实数，$\boldsymbol{I}$是单位矩阵。

求问题（1）的近似解，即解式（2）：

$$\begin{cases}A\boldsymbol{X}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0},\\A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{C}=\mathbf{0},\\\boldsymbol{XZ}-\mu\boldsymbol{I}=\mathbf{0}。\end{cases}\tag{2}$$

利用牛顿法求解，得到搜索方向$(\Delta\boldsymbol{X},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{Z})$，即求解线性系统（3）：

$$\begin{cases}A\Delta\boldsymbol{X}=-(A\boldsymbol{X}-\boldsymbol{b}),\\A^T\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{Z}=-\left(A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{C}\right),\\\Delta\boldsymbol{XZ}+\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{Z}=\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{XZ}。\end{cases}\tag{3}$$

由于$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}$通常不可交换，即$\boldsymbol{XZ}\neq\boldsymbol{ZX}$，这样从式（3）第二个方程解出的$\Delta\boldsymbol{Z}$是对称的，但从第三个方程可知$\Delta\boldsymbol{X}$通常不是对称的，这与下一步迭代需要$\boldsymbol{X}+\alpha\Delta\boldsymbol{X}$是对称的相矛盾。为了解决这个困难，学者们提出了许多方法，其中主要有AHO[2]方向、HKM[3]方向、NT[4]方向等。Zhang Yin 等人[5]通过引入下述对称算子统一了这些方向：

$$H_p(\boldsymbol{K})=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{PKP}^{-1}+\left(\boldsymbol{PKP}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right],$$

式中：$\boldsymbol{P}\in S^n$为非奇异对称矩阵，H_p是算子，$\boldsymbol{K}$是n阶矩阵。

从而，$\Delta\boldsymbol{XZ}+\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{Z}=\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{XZ}$等价于$H_p(\boldsymbol{XZ}+\Delta\boldsymbol{XZ}+\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{Z})=\mu\boldsymbol{I}$。

当$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}$，即$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{X}^{-1}$时为KM方向；

当$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Z}^{\frac{1}{2}}$，即$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{Z}$时为HKM方向；

当$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$时为AHO方向；

当$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{W}$时为NT方向，其中$\boldsymbol{W}$满足$\boldsymbol{W}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}$。

2 右端向量和费用矩阵扰动的界限

将式（2）变为下列非线性系统（4）：

$$\begin{cases}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\\A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C},\\\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})=\Theta(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{Z}')。\end{cases}\tag{4}$$

式中：$\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$是$\boldsymbol{XZ}$的某对称算子，且$\boldsymbol{X}'$和$\boldsymbol{Z}'$是挑选出的迭代点。因此，牛顿方向由式（5）的解给出：

$$\begin{cases}A^T\Delta\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{D}},\\A\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}},\\E\Delta\boldsymbol{X}+F\Delta\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}_{EF}。\end{cases}\tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{X}$是原始残余向量；

$\boldsymbol{R}_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{C}-A^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z}$是对偶残余向量；

算子$E=E(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$和$F=F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$分别是在迭代步$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$时$\Theta$关于$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Z}$的导数，并且

$$\boldsymbol{R}_{EF}=\boldsymbol{R}_{EF}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})=\Theta(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{Z}')-\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})。$$

再定义算子$\odot$为$(\boldsymbol{P}\odot\boldsymbol{Q})\boldsymbol{K}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{PKQ}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{QKP}^{\mathrm{T}}\right)$，

进一步假设上述算子E和F为：

$$E=\boldsymbol{Z}\odot\boldsymbol{N},\ F=\boldsymbol{NX}\odot\boldsymbol{I},\tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{N}$是n阶矩阵。

其共轭算子分别为：

$$E^T=\boldsymbol{Z}\odot\boldsymbol{N},\ F^T=\boldsymbol{XN}\odot\boldsymbol{I}。$$

考虑在内点算法中单步迭代时，右端向量和费用矩阵扰动的界限，有如下结论。

定理1[6] $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$是PSDP$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{C})$和DSDP$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{C})$的严格可行点，$E$和$F$由式（6）给出，$E^{-1}$是$E$的逆算子，且$AE^{-1}FA$非奇异。如果右端向量$\boldsymbol{b}$变成$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$，$\Delta\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$，假设式（4）的一个牛顿步是从$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$得到

的，且对应于PSDP($\boldsymbol{b}',\boldsymbol{C}$)和DSDP($\boldsymbol{b}',\boldsymbol{C}$)中的$(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{Z}')$满足$\Theta(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{Z}')=\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$，那么当且仅当$\Delta\boldsymbol{b}$满足下列不等式组，

$$\begin{cases}\lambda_{\min}\left(\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}\left(E^{-1}FA^T\left(\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}\Delta\boldsymbol{b}\right)\right)\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}\right)\ge -1,\\ \lambda_{\max}\left(\boldsymbol{Z}^{-\frac{1}{2}}\left(A^T\left(\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}\Delta\boldsymbol{b}\right)\right)\boldsymbol{Z}^{-\frac{1}{2}}\right)\le -1。\end{cases}$$

全牛顿步可以取到，且得到的迭代步对于新问题是可行的。此外，当$E^{-1}F$正定时，新的迭代步的对偶间隙不大于$\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Z}$。

定理2[6]　$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$是PSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}$)和DSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}$)的严格可行点，$E$和$F$由式（6）给出，且$AE^{-1}FA$非奇异。如果费用矩阵$\boldsymbol{C}$变成$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}+\Delta\boldsymbol{C},\Delta\boldsymbol{C}\in S^n$。假设式（4）的牛顿步是从$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$得到的，且对应于PSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}'$)和DSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}'$)中的$(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{Z}')$满足$\Theta(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{Z}')=\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$，那么当且仅当下列不等式组成立，

$$\begin{cases}\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}\left(E^{-1}F\Delta\boldsymbol{C}-\right.\right.\\ \qquad\left.\left.E^{-1}FA^T\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}AE^{-1}F\Delta\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}\right)\le -1,\\ \lambda_{\min}\left(\boldsymbol{Z}^{-\frac{1}{2}}\left(\Delta\boldsymbol{C}-A^T\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}AE^{-1}F\Delta\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{Z}^{-\frac{1}{2}}\right)\ge -1。\end{cases}$$

全牛顿步可以取到，且得到的迭代步对于新问题是可行的。此外，当$E^{-1}F$正定时，新的迭代步的对偶间隙不大于$\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Z}$。

定理3[6]　$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$是PSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}$)和DSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}$)的严格可行点，$E$和$F$由式（6）给出，$AE^{-1}FA$非奇异。如果右端向量$\boldsymbol{b}$和费用矩阵$\boldsymbol{C}$分别变成$\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+\beta\boldsymbol{d}_b$，$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}+\beta\boldsymbol{D}_C$，$\beta\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{d}_b\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{D}_C\in S^n$。假设式（4）的一个牛顿步是从$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$得到的，且对应于PSDP($\boldsymbol{b}',\boldsymbol{C}'$)和DSDP($\boldsymbol{b}',\boldsymbol{C}'$)中的$(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{Z}')$满足$\Theta(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{Z}')=\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})$，那么全牛顿步可以取到且其迭代结果对于新问题是可行的，当且仅当β满足条件

$$|\beta|\le\min\{a,b\},$$

其中：a是

$$\lambda_{\max}\left(\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}\left(E^{-1}F\left(\boldsymbol{D}_C-A^T\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}AE^{-1}F\boldsymbol{D}_C-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.A^T\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}\boldsymbol{d}_b\right)\right)\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

的倒数（当该数为负数时，a取负无穷），

$$b\text{是}\lambda_{\min}\left(\boldsymbol{Z}^{-\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{D}_C-A^T\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}AE^{-1}F\boldsymbol{D}_C-\right.\right.$$
$$\left.\left.A^T\left(AE^{-1}FA^T\right)^{-1}\boldsymbol{d}_b\right)\boldsymbol{Z}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

的倒数（当该数为负数时，b取负无穷）。

此外，当$E^{-1}F$正定时，新的迭代步的对偶间隙不大于$\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Z}$。

对于内点算法的AHO, HKM, NT方向，当右端向量和费用矩阵扰动时，E.Yildirim等人[6]也得出了相应的结论。

3　一般情形的ε灵敏度分析

将式（2）变形为下列系统[7]:

$$\begin{cases}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\\ A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C},\\ \Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{0}。\end{cases}\tag{7}$$

于是牛顿步满足下列系统：

$$\begin{cases}A\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{X},\\ A^T\Delta\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}-A^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z},\\ E\Delta\boldsymbol{X}+F\Delta\boldsymbol{Z}=-\Theta(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})。\end{cases}$$

容易验证对于可行迭代解有：

$$E\boldsymbol{X}=F\boldsymbol{Z}。$$

定义1　给定正数ε，称$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$对于PSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}$)和DSDP($\boldsymbol{b},\boldsymbol{C}$)是$\varepsilon$最优的，如果它满足

$$\begin{cases}A\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{X},\\ A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Z}\le\varepsilon。\end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0}$，且上述第三个不等式表示当前迭代的对偶间隙不大于$\varepsilon$。因此$\varepsilon$最优解就是内点算法的最终解。

定义2　一般ε灵敏度分析就是求扰动参数变化的界限，使得扰动问题保持ε最优解不变。

根据上述定义，作费用矩阵或者右端向量发生变化时的一般ε分析，先考虑费用矩阵$\boldsymbol{C}$变化时的情形。

对于给定正数ε，如果已经得到满足$\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Z}=\varepsilon$的$\varepsilon$最优解，那么对偶解$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z})$可以用定理4表示。

定理4　如果定义

$$\boldsymbol{y}''=K\boldsymbol{C}''-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{Z}''=\boldsymbol{C}''-A^TK\boldsymbol{C}''+A^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b},$$

式中：$\boldsymbol{M}=\left(ALA^T\boldsymbol{e}_1,ALA^T\boldsymbol{e}_2,\cdots,ALA^T\boldsymbol{e}_m\right)$，

线性算子$L:S^n\to S^n$定义为$L\boldsymbol{V}=E^{-1}F\boldsymbol{V}$，

线性算子$K:S^n\to\mathbf{R}^m$定义为$K\boldsymbol{V}=\boldsymbol{M}^{-1}AL\boldsymbol{V}$，

$\boldsymbol{e}_i$是$m\times m$单位矩阵的第i列，

$\boldsymbol{C}''\in S^n$是参数矩阵，$\boldsymbol{V}$是n阶矩阵。

那么$A^T\boldsymbol{y}''+\boldsymbol{Z}''=\boldsymbol{C}''$总成立。此外，对于给定的迭代步$(\overline{\boldsymbol{X}},\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}})$，当$\boldsymbol{C}''=\boldsymbol{C}$时，$(\boldsymbol{y}'',\boldsymbol{Z}'')=(\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}})$。

证明

$A^T\boldsymbol{y}"+\boldsymbol{Z}"=$
$A^TK\boldsymbol{C}"-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{C}"-A^TK\boldsymbol{C}"+A^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}=$
$A^TK\boldsymbol{C}"-A^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{C}"-A^TK\boldsymbol{C}"+A^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}"$。

假设已得到可行的迭代步$\left(\overline{\boldsymbol{X}},\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}}\right)$，因为$\left(\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}}\right)$是可行对偶解，则$A^T\boldsymbol{y}"+\boldsymbol{Z}"=\boldsymbol{C}"$，结合$E\overline{\boldsymbol{X}}=F\overline{\boldsymbol{Z}}$及线性算子$L,A$，可得：

$ALA^T\overline{\boldsymbol{y}}+AL\overline{\boldsymbol{Z}}=AL\boldsymbol{C}$。

由$\boldsymbol{M}$的定义得：

$\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{y}}+AL\overline{\boldsymbol{Z}}=AL\boldsymbol{C}$，

$\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{M}^{-1}AL\boldsymbol{C}-\boldsymbol{M}^{-1}L\overline{\boldsymbol{Z}}$。

由$L\boldsymbol{V}=E^{-1}F\boldsymbol{V}$，$K\boldsymbol{V}=\boldsymbol{M}^{-1}AL\boldsymbol{V}$得：

$\overline{\boldsymbol{y}}=K\boldsymbol{C}-\boldsymbol{M}^{-1}AE^{-1}F\overline{\boldsymbol{Z}}$。

由$E\boldsymbol{X}=F\boldsymbol{Z}$且$E^{-1}$存在，有：

$\overline{\boldsymbol{y}}=K\boldsymbol{C}-\boldsymbol{M}^{-1}A\overline{\boldsymbol{X}}=K\boldsymbol{C}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}$。

由$\overline{\boldsymbol{Z}}$和$\overline{\boldsymbol{y}}$的关系得：

$\overline{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{C}-A^T\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{C}-A^TK\boldsymbol{C}-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}=$
$\boldsymbol{C}-A^TK\boldsymbol{C}-A\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}$。

于是，当参数$\boldsymbol{C}"$等于$\boldsymbol{C}$时，则$\left(\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}}\right)=\left(\boldsymbol{y}",\boldsymbol{Z}"\right)$。

定理证毕。

假设费用矩阵$\boldsymbol{C}$沿着方向$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^m\right)$变化，$\theta_C$是实值参数，则有新的原始问题($\mathrm{PSDP}_C$)和新的对偶问题($\mathrm{DSDP}_C$)：

$$(\mathrm{PSDP}_C)\quad \begin{aligned}\min\ & (\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P})\bullet\boldsymbol{X},\\ \text{s.t.}\ & A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{0};\end{aligned}$$

$$(\mathrm{DSDP}_C)\quad \begin{aligned}\max\ & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ \text{s.t.}\ & A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P},\\ & \boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0}。\end{aligned}$$

定理4中的$\boldsymbol{y}"$和$\boldsymbol{Z}"$，用$\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P}$代替$\boldsymbol{C}$，得到新的对偶解$\left(\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{Z}}\right)$，

式中：$\hat{\boldsymbol{y}}=K\left(\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P}\right)-\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}=\overline{\boldsymbol{y}}+\theta_CK\boldsymbol{P}$，

$\hat{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P}-A^TK\left(\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P}\right)+A^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}=$
$\overline{\boldsymbol{Z}}+\theta_C\left(\boldsymbol{P}-A^TK\boldsymbol{P}\right)$。

容易看出，沿着方向$\left(K\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}-A^TK\boldsymbol{P}\right)$移动当前对偶解$\theta_C$个单位，新的对偶解也可得到。对于($\mathrm{PSDP}_C$)和($\mathrm{DSDP}_C$)，要使$\left(\overline{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{Z}}\right)$是$\varepsilon$最优，定义1的3个条件必须满足。因为原始对偶不变，第一个条件满足，第二个和第三个条件可以写成如下形式：

$$\begin{cases}A^T\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{C}+\theta_C\boldsymbol{P},\\ \hat{\boldsymbol{Z}}\succeq\boldsymbol{0},\\ \overline{\boldsymbol{X}}\bullet\hat{\boldsymbol{Z}}\le\varepsilon。\end{cases}$$

由定理4知，上述第一个等式成立，将第三个不等式代入第二个正定性条件中，并令$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}-A^TK\boldsymbol{P}$，得：

$\overline{\boldsymbol{Z}}+\theta_C\left(\boldsymbol{P}-A^TK\boldsymbol{P}\right)\succeq\boldsymbol{0}$，

$\overline{\boldsymbol{Z}}+\theta_C\boldsymbol{P}\succeq\boldsymbol{0}$。

$\overline{\boldsymbol{Z}}+\theta_C\boldsymbol{T}\succeq\boldsymbol{0}$ 当且仅当$\boldsymbol{I}+\theta_C\overline{\boldsymbol{Z}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{Z}}^{-\frac{1}{2}}\succeq\boldsymbol{0}$成立，即

$\lambda_{\min}\left(\theta_C\overline{\boldsymbol{Z}}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{Z}}^{-\frac{1}{2}}\right)\ge-1$。

定义v_C和u_C分别为θ_C的下界和上界，则有：

$v_C\le\theta_C\le u_C$。

由$\overline{\boldsymbol{X}}\bullet\overline{\boldsymbol{Z}}\le\varepsilon$和$\overline{\boldsymbol{Z}}+\theta_C\boldsymbol{T}\succeq\boldsymbol{0}$成立的充分必要条件得其等价条件：

$\theta_C\left(\overline{X}\bullet Z\right)\le0$，

从而得定理5。

定理5　如果θ_C满足：

1）当$\overline{\boldsymbol{X}}\bullet\boldsymbol{T}>0$时，$v_C\le\theta_C\le0$；

2）当$\overline{\boldsymbol{X}}\bullet\boldsymbol{T}<0$时，$0\le\theta_C\le u_C$；

3）当$\overline{\boldsymbol{X}}\bullet\boldsymbol{T}=0$时，$v_C\le\theta_C\le u_C$。

那么，扰动问题(PSDP_C)和(DSDP_C)的解$\left(\overline{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{Z}}\right)$是$\varepsilon$最优的。

推论1　在一般ε灵敏度分析中，费用矩阵$\boldsymbol{C}$的变化范围是$[\boldsymbol{C}+v_C\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{C}+u_C\boldsymbol{P}]$。

考虑右端向量$\boldsymbol{b}$变化的情形，对于给定的正数ε，如果ε最优解$\left(\overline{\boldsymbol{X}},\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}}\right)$满足$\overline{\boldsymbol{X}}\bullet\overline{\boldsymbol{Z}}=\varepsilon$，那么当右端向量$\boldsymbol{b}$变化时，原始对偶解$\overline{\boldsymbol{X}}$的变化由定理6给出。

定理6　假设$\boldsymbol{X}"$定义为

$\boldsymbol{X}"=L\boldsymbol{C}-LA^TK\boldsymbol{C}+G\boldsymbol{b}"$，

式中，线性算子G: $\mathbf{R}^m\to S^n$定义为$G\boldsymbol{b}"=LA^TM^{-1}\boldsymbol{b}"$，参数向量$\boldsymbol{b}"\in\mathbf{R}^m$，那么$A\boldsymbol{X}"=\boldsymbol{b}"$总成立。

此外，对于给定的迭代可行解$\left(\overline{\boldsymbol{X}},\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}}\right)$，当$\boldsymbol{b}"=\boldsymbol{b}$时有$\boldsymbol{X}"=\boldsymbol{X}$。

证明　由$\boldsymbol{M}$和K的定义，经过简单的代换，可知$A\boldsymbol{X}"=\boldsymbol{b}"$总成立。假设$\left(\overline{\boldsymbol{X}},\overline{\boldsymbol{y}},\overline{\boldsymbol{Z}}\right)$是给定的迭代可行解，由定理4和等式$E\overline{\boldsymbol{X}}=F\overline{\boldsymbol{Z}}$，得：

$$\overline{\boldsymbol{X}} = E^{-1}F\overline{\boldsymbol{Z}} =$$
$$E^{-1}\left(F\left(\boldsymbol{C} - A^T K\boldsymbol{C} + A^T \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}\right)\right) =$$
$$E^{-1}\left(F\left(\boldsymbol{C} - A^T K\boldsymbol{C} + A^T \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}\right)\right) =$$
$$E^{-1}F\boldsymbol{C} - E^{-1}FA^T K\boldsymbol{C} + E^{-1}FA^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b} =$$
$$L\boldsymbol{C} - LA^T K\boldsymbol{C} + G\boldsymbol{b}。$$

结合$\boldsymbol{X}''$的定义可知，当参数$\boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b}$时，$\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}''$。

定理证毕。

假设右端向量$\boldsymbol{b}$沿着方向$\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{p}\in \mathbf{R}^m\right)$变化，$\theta_b$是实值参数，则得到修正后的问题$(\mathrm{PSDP}_b)$和$(\mathrm{DSDP}_b)$：

$$(\mathrm{PSDP}_b)\quad \begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{X}, \\ &\text{s.t.}\ \ A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} + \theta_b\boldsymbol{p}, \\ &\qquad \boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{0}; \end{aligned}$$

$$(\mathrm{DSDP}_b)\quad \begin{aligned} &\max\ \left(\boldsymbol{b}+\theta_b\boldsymbol{p}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \\ &\text{s.t.}\ \ A^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}, \\ &\qquad \boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0}。 \end{aligned}$$

在定理6中，用$\boldsymbol{b} + \theta_b\boldsymbol{p}$替换表达式$\boldsymbol{X}''$中的$\boldsymbol{b}''$，得新的原始解：

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = L\boldsymbol{C} - LA^T K\boldsymbol{C} + G\left(\boldsymbol{b} + \theta_b\boldsymbol{p}\right) = \overline{\boldsymbol{X}} + \theta_b G\boldsymbol{p}。$$

容易看出，沿着当前方向$\boldsymbol{p}$将原始解移动θ_b个单位时，就可得到新的原始解。

类似前面的分析，有定理7。

定理7　假设θ_b的上界和下界分别是u_b和v_b，即$v_b\le\theta_b\le u_b$，如果θ_b满足：

1）当$G\boldsymbol{p}\bullet\overline{\boldsymbol{Z}} > 0$时，$v_b\le\theta_b\le 0$；

2）当$G\boldsymbol{p}\bullet\overline{\boldsymbol{Z}} < 0$时，$0\le\theta_b\le u_b$；

3）当$G\boldsymbol{p}\bullet\overline{\boldsymbol{Z}} = 0$时，$v_b\le\theta_b\le u_b$。

那么，扰动问题(PSDP_b)和(DSDP_b)的解$\left(\widehat{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{y}}, \overline{\boldsymbol{Z}}\right)$是$\varepsilon$最优的。

推论2　在一般ε灵敏度分析中，右端向量$\boldsymbol{b}$的变化范围是$\left[\boldsymbol{b} + v_b\boldsymbol{p}, \boldsymbol{b} + u_b\boldsymbol{p}\right]$。

4　结语

本文直接把W.J. Kim等人[8]在线性规划中的结论推广到半定规划上。线性规划的灵敏度分析是讨论右端向量和费用矩阵对最优解的影响；半定规划的灵敏度分析只讨论右端向量和费用矩阵对严格可行解以及最优解的影响。目前，对半定规划系数矩阵的扰动情况研究较少，有待学者们进一步研究；如何把灵敏度分析和含参数的半定规划应用到管理科学、通信工程等领域，也是值得研究的课题。

参考文献：

[1] Helmberg C. Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization[M]. Berlin：Konrad-Zuse-Zentrum for Information Stechnik，2000：13-15.

[2] Alizadeh F, Haeberly J A，Overton M. Primal-Dual Interior Point Methods for Semidefinite Programming: Convergence Rates, Stability and Numerical Results[J]. SIAM Optim，1998，8(3)：746-768.

[3] Helmberg C，Rendl F，Vanderbei R，et al. An Interior-Point Method for Semidefinite Programming[J]. SIAM Journal on Optimization，1996，6(2)：342-361.

[4] Nesterov Yu E，Todd M J. Primal-Dual Interior-Point Methods for Self-Scaled Cones[J]. SIAM Journal on Optimization，1998，8(2)：324-362.

[5] Zhang Yin，Gao Liyan. On Numerical Solution of Maximum Volume Ellipsoid Problem[J]. SIAM Journal on Optimization，2003，14(1)：53-76.

[6] Yildirim E，Todd M J. Sensitivity Analysis in Linear Programming and Semidefinite Programming Using Interior-Point Methods[J]. Mathematical Programming, 2001，90(2)：229-261.

[7] Sungmook L，Sangwook L，Soondal P. An ε Sensitivity for Semidefinite Programming[J]. European Journal of Operational Research，2005，164：417-422.

[8] Kim W J，Park C K，Park S. An ε Sensitivity Analysis in the Primal-Dual Interior Point Method[J]. European Journal of Operational Research，1999，116(3)：629-639.

（责任编辑：邓光辉）