线性微分方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的基本解组新探

阳凌云，符云锦

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：对变系数线性齐次微分方程组的特殊类型的求解问题进行了探讨，给出了系数矩阵为$\boldsymbol{A}(x)$（各元素为x的多项式）的一阶线性齐次微分方程组解的结构定理，以及系数矩阵为$\boldsymbol{A}f(x)$（$\boldsymbol{A}$为n阶常数矩阵，$f(x)$为可积函数）的一阶线性齐次微分方程组解的结构定理，并通过实例给出了具体的求解方法。

关键词：微分方程组；基本解组；解法；通解

中图分类号：O175.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2011)01-0040-05

A New Research on Solution of Linearity Differential Equations $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$

Yang Lingyun，Fu Yunjin

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Investigates the solution of special variable coefficient linearity homogeneous differential equations. Presents the structure theorem of first-order linear homogeneous differential equations with coefficient matrix $\boldsymbol{A}(x)$(each element is polynomial of x) and the structure theorem with coefficient matrix $\boldsymbol{A}f(x)$ ($\boldsymbol{A}$ is n th ordinary matrix and $f(x)$ is an integral function). And provides specific solving methods through examples.

Keywords：differential equation systems; fundamental set of solution; solving method; general solution

0　引言

求解一阶线性非齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x)\text{，}\qquad（1）$$

其关键是，能否求出其对应的齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}\qquad（2）$$

的一个基本解组。到目前为止，对于常系数线性齐次微分方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$，借助线性代数中的Jordan标准型理论或指数矩阵，使这一问题得到了彻底解决；但对于方程组（2）如何求出其基本解组，至今尚无一般方法[1-5]。对此，本文给出了方程组（2）的2种特殊类型的求解方法。

定义1　设存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，通过变换$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}$，使得$f(\boldsymbol{A})$与$f(\boldsymbol{B})$都能化成Jordan标准型，且对应的Jordan块的阶数相同，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同变换矩阵。

定义2　设$n\times n$矩阵

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{n}a_{11}^{(i)}x^i & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{12}^{(i)}x^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{1n}^{(i)}x^i\\ \sum\limits_{i=0}^{n}a_{21}^{(i)}x^i & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{22}^{(i)}x^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{2n}^{(i)}x^i\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sum\limits_{i=0}^{n}a_{n1}^{(i)}x^i & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{n2}^{(i)}x^i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n}a_{nn}^{(i)}x^i\end{pmatrix}=$$

$$\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1x+\cdots+\boldsymbol{A}_nx^n\text{，}$$

收稿日期：2010-09-12

作者简介：阳凌云（1947-），男，湖南湘潭人，湖南工业大学教授，主要从事分析学及数学教育理论研究，
E-mail：yly_mc@sina.com

式中：$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1n}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} & \cdots & a_{2n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(i)} & a_{n2}^{(i)} & \cdots & a_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}$，$i$=0,1,2,⋯,$n$；

$a_{kj}^{(i)}$为常数，k,j =1,2,⋯,n。

若矩阵$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1,\cdots, \boldsymbol{A}_n$是同变换矩阵，则称

$$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1x+\cdots+\boldsymbol{A}_nx^n \tag{3}$$

为同变换等幂矩阵，且称线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x) \tag{4}$$

为同变换等幂线性微分方程组。

本文研究同变换等幂线性微分方程组和系数矩阵为$\boldsymbol{A}f(x)$的线性微分方程组，求基本解组的问题。

1　引理

引理 1　设$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换等幂矩阵，且矩阵$\boldsymbol{A}(x)$中$\boldsymbol{A}_i$的特征单根$\lambda_j^{(i)}$所对应的特征向量为$\boldsymbol{T}_j$ (i=0,1,2,⋯,n；j=1,2,⋯,n)，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_1^{(i)}x^i & & & \\ & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_2^{(i)}x^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_n^{(i)}x^i \end{pmatrix}$$

成立。

证明　因为$\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1x+\cdots+\boldsymbol{A}_nx^n$是同变换等幂矩阵，由定义 1 可知$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1,\cdots, \boldsymbol{A}_n$是同变换矩阵。又因为矩阵$\boldsymbol{A}_i$的特征单根$\lambda_j^{(i)}$所对应的特征向量为$\boldsymbol{T}_j$，所以有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{(i)} & & & \\ & \lambda_2^{(i)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{(i)} \end{pmatrix},$$

式中：$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$；

且有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_1x\boldsymbol{T}+\cdots+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_nx^n\boldsymbol{T}=$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_1^{(i)}x^i & & & \\ & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_2^{(i)}x^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_n^{(i)}x^i \end{pmatrix}。$$

2　主要结论

2.1　系数为同变换等幂矩阵的一阶线性齐次微分方程组的解

定理 1　若$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换等幂矩阵，且矩阵$\boldsymbol{A}(x)$中$\boldsymbol{A}_i$的特征单根$\lambda_j^{(i)}$所对应的特征向量为$\boldsymbol{T}_j$ (i=0,1,2,⋯,n；j=1,2,⋯,n)，则方程组（2）的通解为：

$$\boldsymbol{Y}(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1^{(0)}x+\frac{\lambda_1^{(1)}}{2}x^2+\cdots+\frac{\lambda_1^{(n)}}{n+1}x^{n+1}}\boldsymbol{T}_1+ C_2\mathrm{e}^{\lambda_2^{(0)}x+\frac{\lambda_2^{(1)}}{2}x^2+\cdots+\frac{\lambda_2^{(n)}}{n+1}x^{n+1}}\boldsymbol{T}_2+\cdots+ C_n\mathrm{e}^{\lambda_n^{(0)}x+\frac{\lambda_n^{(1)}}{2}x^2+\cdots+\frac{\lambda_n^{(n)}}{n+1}x^{n+1}}\boldsymbol{T}_n。 \tag{5}$$

证明　因为矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换等幂矩阵，由引理 1 知，存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_1^{(i)}x^i & & & \\ & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_2^{(i)}x^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_n^{(i)}x^i \end{pmatrix}。$$

利用变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{TZ}$，则有$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{TZ}$，即

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1' \\ \boldsymbol{Z}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_1^{(i)}x^i & & & \\ & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_2^{(i)}x^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_n^{(i)}x^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z}_n \end{pmatrix}。 \tag{6}$$

易见方程组（6）有n个线性无关的解：

$$\boldsymbol{Z}_1(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_1^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}},$$

$$\boldsymbol{Z}_2(x)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_2^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}},\ \cdots,$$

$$\boldsymbol{Z}_n(x)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_n^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}。$$

把这n个线性无关的解代回变换中，得到方程组（2）的一个基本解组$\boldsymbol{Y}_j(x)=\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}\boldsymbol{T}_j$，$\boldsymbol{T}_j$是$\boldsymbol{T}$的第$j$列向量。

所以方程组（2）的通解为式（5）。

定理 2　若$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换等幂矩阵，矩阵$\boldsymbol{A}(x)$中$\boldsymbol{A}_i$的m个不同的特征根为$\lambda_1^{(i)},\lambda_2^{(i)},\cdots,\lambda_m^{(i)}$，它们的重数分别为$k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_m^{(i)}$，则方程组（2）对每一个$\lambda_j^{(i)}$有$k_j^{(i)}$($i$=0,1,⋯,$n$；$j$=1,2,⋯,$m$)个形如

$$\boldsymbol{Y}_1(x)=\boldsymbol{P}_1(N)\mathrm{e}^{\lambda_j^{(i)}L},\boldsymbol{Y}_2(x)=\boldsymbol{P}_2(N)\mathrm{e}^{\lambda_j^{(i)}L},\ \cdots,$$
$$\boldsymbol{Y}_{k_j^{(i)}}(x)=\boldsymbol{P}_i(N)\mathrm{e}^{\lambda_j^{(i)}L}$$

的线性无关的解。式中：$N=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{i+1}}{i+1}$，$\boldsymbol{P}_j(N)\left(j=1,2,\cdots,k_j^{(i)}\right)$的每一个分量为$N$的次数不高于$k_j^{(i)}-1$的多项式。

只要取遍所有的特征根$\lambda_j^{(i)}(j=1,2,\cdots,m)$就可得到方程组（2）的一个基本解组。

定理2的证明与文献[1]中定理3.14的证明类似。

定理3 若$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}(x)$是同变换等幂矩阵，且矩阵$\boldsymbol{A}(x)$中$\boldsymbol{A}_i$的特征根$\lambda_j^{(i)}$的重数为$k_j^{(i)}(i=0,1,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，则方程组（2）有$k_j^{(i)}$个形如

$$\boldsymbol{Y}(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1N+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}N^{k_j^{(i)}-1}\right]\mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}} \tag{7}$$

的线性无关的解。式（7）中向量$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}$（即$\lambda_j^{(i)}$的$k_j^{(i)}$个特征向量），由矩阵方程组

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\ \qquad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=(k_j^{(i)}-1)\boldsymbol{R}_{k_i-1},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^{k_j^{(i)}}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{8}$$

所确定。只要取遍所有的特征根$\lambda_j^{(i)}(j=1,2,\cdots,m)$，就得到方程组（2）的一个基本解组。

证明 把式（7）代入方程组（2）得：

$$\left[\boldsymbol{R}_1N'+2\boldsymbol{R}_2N'N+\cdots+\left(k_j^{(i)}-1\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}N'N^{k_j^{(i)}-2}\right]\mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}+$$
$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}x^i\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1N+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}N^{k_j^{(i)}-1}\right]\mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}=$$
$$\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{A}_ix^i\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1N+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}N^{k_j^{(i)}-1}\right]\mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}, \tag{9}$$

式中：$N'=\sum_{i=0}^{n}x^i$。

消去式（9）中$\mathrm{e}^{\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}\frac{x^{i+1}}{i+1}}$，并比较$N$的次数有：

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{A}_ix^i-\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}x^i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1\sum_{i=0}^{n}x^i,\\ \left(\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{A}_ix^i-\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}x^i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2\sum_{i=0}^{n}x^i,\\ \qquad\vdots\\ \left(\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{A}_ix^i-\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}x^i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\left(k_j^{(i)}-1\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}\sum_{i=0}^{n}x^i,\\ \left(\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{A}_ix^i-\sum_{i=0}^{n}\lambda_j^{(i)}x^i\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}=\boldsymbol{0}。\end{cases} \tag{10}$$

比较式（10）中每一个矩阵方程两端x的同次幂系数（向量），对任意一个$i(i=1,2,\cdots,n)$，有矩阵方程组：

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\ \qquad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\left(k_j^{(i)}-1\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}=\boldsymbol{0}。\end{cases} \tag{11}$$

注意到式（11）与式（8）是等价的，故定理得证。同时，式（11）与式

$$\begin{cases}\left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1}=\boldsymbol{0},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^2\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2}=\boldsymbol{0},\\ \qquad\vdots\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^{k_j^{(i)}-1}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{0},\\ \left(\boldsymbol{A}_i-\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{E}\right)^{k_j^{(i)}}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

是等价的，即$\lambda_j^{(i)}$所对应的特征向量为：

$$\boldsymbol{T}_{k_j^{(i)}}=\left(\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-1},\boldsymbol{R}_{k_j^{(i)}-2},\cdots,\boldsymbol{R}_1,\boldsymbol{R}_0\right)。 \tag{12}$$

2.2 系数矩阵为$\boldsymbol{A}f(x)$的一阶线性齐次微分方程组的解

定理4 设$f(x)$是可积函数，若常数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征单根λ_i所对应的特征向量为$\boldsymbol{T}_i(i=1,2,\cdots,n)$，则一阶线性齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}f(x)\boldsymbol{Y} \tag{13}$$

的通解为：

$$\boldsymbol{Y}(x)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1\int f(x)\mathrm{d}x}\boldsymbol{T}_1+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2\int f(x)\mathrm{d}x}\boldsymbol{T}_2+\cdots+C_n\mathrm{e}^{\lambda_n\int f(x)\mathrm{d}x}\boldsymbol{T}_n。 \tag{14}$$

定理4的证明与定理1的证明相似。

定理5 设$f(x)$为可积函数，若常数矩阵$\boldsymbol{A}$有m个不同的特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，它们的重数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_m$，则一阶线性齐次微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}f(x)\boldsymbol{Y} \tag{15}$$

对于每一个λ_i有k_i个形如

$$\boldsymbol{Y}_1(x)=\boldsymbol{P}_1(L)\mathrm{e}^{\lambda_iL},\boldsymbol{Y}_2(x)=\boldsymbol{P}_2(L)\mathrm{e}^{\lambda_iL},\ \cdots,$$
$$\boldsymbol{Y}_{k_i}(x)=\boldsymbol{P}_i(L)\mathrm{e}^{\lambda_iL} \tag{16}$$

的线性无关的解。式中：$L=\int f(x)\mathrm{d}x$，$\boldsymbol{P}_j(L)(j=1,2,\cdots,k_i)$的每一个分量为$L$的次数不高于$k_i-1$的多项式。

只要取遍所有的特征根$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$就可得到方程组（15）的一个基本解组。

定理 5 的证明与文献[1]中定理 3.14 的证明类似。

定理 6　若常数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征根λ_i的重数为$k_i(i=1,2,\cdots,m)$，则一阶线性齐次微分方程组（15）有k_i个形如：

$$\boldsymbol{Y}(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1L+\cdots+\boldsymbol{R}_{k_i-1}L^{k_i-1}\right]e^{\lambda_i L} \tag{17}$$

的线性无关的解。式（17）中向量$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{k_i-1}$由矩阵方程组

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{R}_1=2\boldsymbol{R}_2,\\\quad\vdots\\(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{R}_{k_i-2}=(k_i-1)\boldsymbol{R}_{k_i-1},\\(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{k_i}\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{18}$$

所确定。只要取遍所有的$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$，就可得到方程组（15）的一个基本解组。

定理 6 的证明与文献[1]中定理 3.15 的证明相似。

3　定理应用举例

例 1　解方程组

$$\begin{cases}x'=(t^2-t+2)x,\\y'=(t^2+t+1)x-(2t+1)y+2(t^2+t+1)z,\\z'=-x+(t^2+t+1)y+(t^2-t)z。\end{cases}$$

解　$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}t^2-t+2&0&0\\t^2+t+1&-2t-1&t^2+t+1\\-1&t^2+t+1&t^2-t\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}t^2+\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-2&2\\-1&1&0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}=$$

$\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1t+\boldsymbol{A}_2t^2$。

矩阵$\boldsymbol{A}_2$的特征根$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$所对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

矩阵$\boldsymbol{A}_1$的特征根$\lambda_1=-3,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$所对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

矩阵$\boldsymbol{A}_0$的特征根$\lambda_1=-2,\lambda_2=2,\lambda_3=1$所对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$。

于是根据定义 1，存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，使得$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$是同变换矩阵。

所以，根据定理 1 的式（5）得方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=C_1e^{-\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2-2t}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+C_3e^{\frac{2}{3}t^3+t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}。$$

例 2　解方程组

$$\begin{cases}x'=-tx+(t-3)y-4z,\\y'=-4x-ty+4tz,\\z'=tx-y-4tz。\end{cases}$$

解　$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}-t&t-3&-4\\-4&-t&4t\\t&-1&-4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-4\\-4&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+$

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{pmatrix}t=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1t\ 。$$

矩阵$\boldsymbol{A}_0$的特征根为$\lambda_1^{(0)}=-4,\lambda_{2,3}^{(0)}=2$；矩阵$\boldsymbol{A}_1$的特征根为$\lambda_1^{(1)}=0,\lambda_{2,3}^{(1)}=-3$。

易知$\lambda_1^{(0)}=-4,\lambda_1^{(1)}=0$所对应的特征向量为$(4\ \ 4\ \ 1)^{\mathrm{T}}$。

根据定义 1，假设存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1$是同变换矩阵，那么由定理 1 可得$\lambda_1^{(0)},\lambda_1^{(1)}$所对应的解是$\boldsymbol{Y}_1(t)=e^{-4t}(4\ \ 4\ \ 1)^{\mathrm{T}}$。由定理3知，可设$\lambda_{2,3}^{(0)}=2,\lambda_{2,3}^{(1)}=-3$所对应的 2 个线性无关解形为

$$\boldsymbol{Y}(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\boldsymbol{R}_1\right]e^{2t-\frac{3}{2}t^2}\ ,$$

并且$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1$满足矩阵方程组：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_0-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{0},\\(\boldsymbol{A}_0-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0}。\end{cases}$$

解得$\boldsymbol{R}_0$的 2 个线性无关向量为$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{R}_1$相应的 2 个向量为$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$。所以根据式（12），存在可逆矩阵$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}4&1&0\\4&-2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$，使得$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1$是同变换矩阵。

于是，可得原方程组的 2 个线性无关解为：

$$\boldsymbol{Y}_1(x)=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{2t-\frac{3}{2}t^2},$$

$$\boldsymbol{Y}_2(x)=\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{2t-\frac{3}{2}t^2}。$$

因此，原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{-4t}\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t-\frac{3}{2}t^2}\begin{pmatrix}t+\frac{t^2}{2}\\1-2t-t^2\\-1+t+\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}+$$

$$C_3\mathrm{e}^{2t-\frac{3}{2}t^2}\begin{pmatrix}-1-2t-t^2\\4t+2t^2\\1-2t-t^2\end{pmatrix}。$$

例3 求解方程组

$$\begin{cases}y_1'=-\mathrm{e}^x y_1+\mathrm{e}^x y_2,\\y_2'=-4\mathrm{e}^x y_1+3\mathrm{e}^x y_2,\\y_3'=\mathrm{e}^x y_1+2\mathrm{e}^x y_3。\end{cases}$$

解 原方程组可化为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^x\boldsymbol{Y}$，式中：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}。$$

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征根$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$。

易知$\lambda_1=2$所对应的特征向量为$(0\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$，

由定理4得所对应的解是$\boldsymbol{Y}_1(t)=\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}(0\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$。下面求$\lambda_2=\lambda_3=1$所对应的2个线性无关解。由定理6可设其解形为$\boldsymbol{Y}(x)=\left[\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1\mathrm{e}^x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$，并且$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1$满足矩阵方程组：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{R}_1,\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0}。\end{cases}$$

解得$\boldsymbol{R}_0$的2个线性无关向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{R}_1$相应的2个向量为$\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$。

于是，可得原方程组的2个线性无关解为：

$$\boldsymbol{Y}_1(x)=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x},\ \boldsymbol{Y}_2(x)=\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}。$$

因此，原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\\y_3(x)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^x}+C_2\begin{pmatrix}1-\mathrm{e}^x\\1-2\mathrm{e}^x\\\mathrm{e}^x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C_3\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^x\\-1-2\mathrm{e}^x\\1+\mathrm{e}^x\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}。$$

参考文献：

[1] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2006：116-163.
Differential Equation Teaching and Research Section of Northeast Normal University. Ordinary Differential Equations [M]. 2nd ed. Bejing: Higher Eduction Press，2006：116-163.

[2] 焦宝聪，王在洪，时红廷. 常微分方程[M]. 北京：清华大学出版社，2008：176-180.
Jiao Baocong，Wang Zaihong，Shi Hongting. Ordinary Differential Equations[M]. Bejing：Tsinghua University Perss，2008：176-180.

[3] 李文荣，张全信. 函数方程与微分方程的解析解[M]. 北京：科学出版社，2008：106-108.
Li Wenrong，Zhang Quanxin. Resolution of Functionnal Equation and Differential Equation[M]. Beijing：Science Press，2008：106-108.

[4] 化存才，赵奎奇，杨 慧，等. 常微分方程解法与建模应用选讲[M]. 北京：科学出版社，2009：86-116.
Hua Cuncai，Zhao Kuiqi，Yang Hui，et al. Selected Lectures of Ordinary Differential Equation and Modeling Application [M]. Beijing：Science Press，2009：86-116.

[5] Dong Shijie，Ge Weigao. Positive Solutions of An *m*-Point Boundary Value Problem with Sign Changing Nonlinearities [J]. Computers & Mathematics with Applications，2005，49 (4)：589-598.

（责任编辑：邓光辉）