# 等离子体中双撕裂模线性增长率分析

宋绍瑞，龚学余

（南华大学 数理学院，湖南 衡阳 421001）

**摘　要**：在托卡马克等离子体中，撕裂不稳定存在已被人们广泛认识，针对双撕裂模线性增长情况，采用边界层法对其增长率进行了分析，并进行了数值模拟。

**关键词**：等离子体；双撕裂模；增长率；边界层方法

**中图分类号**：O534　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2011)01-0029-05

## Analysis on the Linear Growth Rate of Double-Tearing Mode in Plasmas

Song Shaorui，Gong Xueyu

（School of Mathematics and Physics，University of South China，Hengyang Hunan 421001，China）

**Abstract**：The presence of tearing instability in Tokamak plasma has been widely recognized. In view of the linear growth of double-teaing mode, analyses its gowth rate with boundary layer method and simulates the results.

**Keywords**：plasmas；double-tearing mode；the growth rate；boundary layer method

## 0　引言

理想等离子体的重要特征之一是“磁冻结”效应，因此，不稳定性涉及等离子体相对磁场的运动和运动特征时间尺度。当2条反向磁力线足够接近至非理想状态，以至于随它们一起运动的“等离子体元”分辨不出自己到底属于哪一条磁力线时，在此区域内的磁力线已经不是原来的磁力线了，它们之间的连接形式发生了重组，即磁重联[1]。显然，磁重联伴随磁场拓扑的变化，撕裂模就是一种典型的磁重联过程。

对撕裂模的理论研究表明：经典撕裂模尺度线性增长率为$\gamma \sim S^{-3/5}\tau_h^{-1}$，其中$S=\tau_r/\tau_h$（$\tau_r=a^2/\eta, \tau_h=a/V_A$）是磁雷诺数[1-2]。在$m$=1的柱形几何位形下，且仅考虑电阻而不计反常电子黏滞时，其线性增长率为$\gamma \sim S^{-1/3}\tau_h^{-1}$，反之$\gamma \sim R^{-1/5}\tau_v^{-1}$。对于存在多重有理面的情况，等离子体会产生双撕裂模，当这些有理面之间距离足够小时，它们之间的相互作用不断增大，则等离子体会变得更加不稳定。笔者对此种情况下双撕裂模增长作详尽推导分析，为进一步对其线性和非线性演化情况的分析提供理论基础。

## 1　磁流体力学平衡方程

考虑平板几何位形，磁感应强度可表示为[2]：

$$\boldsymbol{B}_0=B_{0y}(x)\boldsymbol{y}+B_{0z}(x)\boldsymbol{z}。\tag{1}$$

假定在$x$方向等离子片长度为$a$，电流沿$\boldsymbol{z}$方向且等离子体是不可压缩的，矢量场$\boldsymbol{B}_\perp$和$\boldsymbol{V}_\perp$可用通量函数$\psi$和流量函数$\phi$表示为：

$$\boldsymbol{B}_\perp=\nabla\psi\times\boldsymbol{z}，\tag{2}$$

$$\boldsymbol{V}_\perp=\nabla\phi\times\boldsymbol{z}。\tag{3}$$

欧姆定律和$\boldsymbol{z}$方向电流表示为：

$$\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{j}-\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}-\frac{m_e v_e c^2}{n_e e^2}\nabla^2\boldsymbol{j},\tag{4}$$

$$\boldsymbol{J}_z=-\nabla^2\psi。\tag{5}$$

**收稿日期**：2010-11-21

**作者简介**：宋绍瑞（1972-），男，江苏宿迁人，南华大学硕士生，主要研究方向为等离子体物理，

E-mail：songshaorui2007@126.com

方程式（4）取$z$方向分量就变化为：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\psi+\frac{c^2}{4\pi}\eta\nabla^2\psi-\frac{m_e n_e c^2}{4\pi n_e e^2}\nabla^4\psi, \quad (6)$$

$\phi$满足运动方程（取$z$方向分量）

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\phi)=-(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)(\nabla^2\phi)+\frac{1}{4\pi\rho}\left[\nabla(\nabla^2\psi)\times\nabla\psi\right]\cdot\boldsymbol{z}。\quad (7)$$

假定$\eta, \rho, \mu_e$为常数，微扰形式为

$f\sim f(x)\exp(\mathrm{i}k_y y+\gamma t)$，把方程式（6）和式（7）线性化可得：

$$\gamma\psi_1=V_x B_{0y}(x)+\frac{\eta c^2}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-k_y^2\psi_1\right)-\frac{\mu_e c^2}{\omega_{pe}^2}\left(\frac{\partial^4\psi_1}{\partial x^4}-k_y^4\psi_1\right), \quad (8)$$

$$\rho\gamma\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-k_y^2\phi\right)=-\frac{ik_y}{4\pi}B_{0y}''(x)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-k_y^2\psi_1\right), \quad (9)$$

在把长度归为$a$，时间为$\tau_h$，磁场强度为$B_0$时，方程式（8）和式（9）转化为无量纲形式：

$$\gamma\tau_h\psi_1=\gamma\tau_h\xi B_{0y}(x)+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\alpha^2\psi_1\right)-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^4\psi_1}{\partial x^4}+\alpha^4\psi_1\right), \quad (10)$$

$$(\gamma\tau_h)^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-\alpha^2\xi\right)=\alpha^2 B_{0y}''(x)\psi_1-\alpha^2 B_{0y}(x)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\alpha^2\psi_1\right), \quad (11)$$

式中：$\alpha=k_y a$，$\xi=\mathrm{i}k_y\phi/\gamma a$，$R=\tau_v/\tau_h$；

$S=\tau_r/\tau_h$为磁雷诺数；

$\tau_v=a^4\omega_{pe}^2/\mu_e c^2$为黏滞扩散时间。

## 2 撕裂模增长率分析

已有文献对常数磁通近似和$m$=1柱形几何位形下撕裂模的线性增长率作过较详细的研究[2-5]。本文中笔者利用简化磁流体力学方程，分2种情况分析并推导双撕裂模的线性增长率。

1）仅考虑电阻而忽略由湍流引起反常电子黏滞效应的情况下，双撕裂模的线性增长率。

忽略反常电子黏滞效应后，式（10）可简化为：

$$\gamma\tau_h\psi_1=\gamma\tau_h\xi B_{0y}(x)+\frac{1}{S}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\alpha^2\psi_1\right), \quad (12)$$

式中：$B_{0y}(x)$在$x=\pm x_s$处为0，$J_{0z}$最大。见图1。

由于磁雷诺数很大（通常$S\sim10^6$），方程式（12）中的电阻项显得十分重要。下面采用边界层法求解内区$(|x|<x_s)$和外区$(|x|>x_s)$式（12）的解，并用匹配条件将求解结果连接起来。

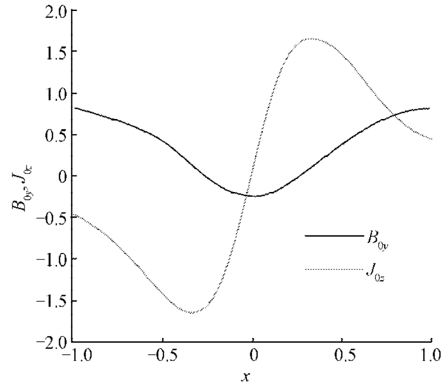


**图1 双撕裂模初始磁场$B_{0y}(x)$和电流$J_{0z}(x)$**

Fig. 1 Initial magnetic field $B_{0y}(x)$ and initial current $J_{0z}(x)$ for the double-tearing mode

在外区，系统可作为理想等离子体来处理，方程式（12）满足$\psi_1=B_{0y}(x)\xi$，将其代入方程式（11）可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\gamma\tau_h)^2+(\alpha B_{0y}(x))^2\right]\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=\alpha^4\left[(\gamma\tau_h)^2+(\alpha B_{0y}(x))^2\right]\xi, \quad (13)$$

方程式（13）的内部项$(\gamma\tau_h)^2$仅在$|x|=x_s$附近小区域内起作用，此时$\gamma\tau_h\sim\alpha B_{0y}(x)$。在外部区域，$\gamma\tau_h$可以忽略，则方程式（13）可简化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha B_{0y}(x))^2\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}=\alpha^4 B_{0y}^2(x)\xi, \quad (14)$$

方程式（14）的解可用参数$\alpha^2x^2$的幂级数表示，即

$\xi=\xi_0+\xi_1+\xi_2+\cdots$。

对于最低级次，式（14）可简化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\alpha B_{0y}(x))^2\right]\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}x}=0。\quad (15)$$

由于$\xi_0$关于$x$=0对称，且$|x|=x_s$是奇异面，故方程式（15）的解可表示为：

$$\begin{cases}\xi_0(x)=\xi_\infty=\mathrm{const} & (|x|<x_s),\\ \xi_0(x)=0 & (|x|>x_s)。\end{cases} \quad (16)$$

而$\xi_1(x)$可写为：

$$\begin{cases}(\xi_\infty)^{-1}\dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{\alpha}{B_{0y}(x)}\right)^2\displaystyle\int_0^x B_{0y}^2(x')\mathrm{d}x' & (|x|<x_s),\\ (\xi_\infty)^{-1}\dfrac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}x}=\left(\dfrac{\alpha}{B_{0y}(x)}\right)^2\displaystyle\int_0^{x_s} B_{0y}^2(x')\mathrm{d}x' & (|x|>x_s)。\end{cases} \quad (17)$$

在$x=x_s$附近将$B_{0y}(x)$按泰勒级数展开，忽略方程式（13）右边的项，则式（17）与式（16）匹配可得到

$$\xi(x)=\frac{1}{2}\xi_\infty\left[1-\frac{2}{\pi}\arctan\left(\alpha B_{0y}{}'(x-x_s)/\gamma\tau_h\right)\right],\quad(18)$$

对方程式（18）求导，且有$\alpha B_{0y}{}'(x-x_s)/\gamma\tau_h\sim-\infty$，$B_{0y}(x)\simeq B_{0y}(x_s)=B_{0y}{}'$，同时对方程式（17）求导，且$x\sim x_s^-$并令两者相等，可得双扭曲模的增长率为：

$$\gamma_h\tau_h=-\frac{\pi a^3}{B_{0y}{}'}\int_0^{x_s}B_{0y}^2(x')\mathrm{d}x',$$

从此式可看出：在平板几何位形下，双扭曲模是稳定的[6]。但电阻和反常电子黏滞可使双撕裂模变得不稳定。在外部区域$(|x|>x_s)$，解的形式仍用式（16）和式（17）表示；在内部区域$(|x|<x_s)$，忽略$\alpha^2$且把$B_{0y}(x)$在有理面$x_s$附近展开，则式（11）和式（12）可化为：

$$(\gamma\tau_h)^2\xi''=-\alpha^2B_{0y}{}''(x-x_s)\psi'',\quad(19)$$

$$\gamma\tau_h\psi_1=\gamma\tau_hB_{0y}{}''(x-x_s)\xi+\frac{1}{S}\psi_1'',\quad(20)$$

求方程式（19）和式（20）的解，并与外部的解匹配，就可得到如下耗散关系，

$$\hat\lambda^{5/4}\hat\lambda_h\left[\left(\hat\lambda^{3/2}-1\right)/4\right]/\Gamma\left[\left(\hat\lambda^{3/2}+5\right)/4\right]=8,\quad(21)$$

$$\text{式中：}\hat\lambda=\gamma\tau_h\left(S/\alpha^2B_{0y}'^2\right)^{1/3},\hat\lambda_h=\gamma_h\tau_h\left(S/\alpha^2B_{0y}'^2\right)^{1/3},\quad(22)$$

将$\hat\lambda$作为$\hat\lambda_h$的函数，式（21）耗散关系的数值解如图2所示[6]。

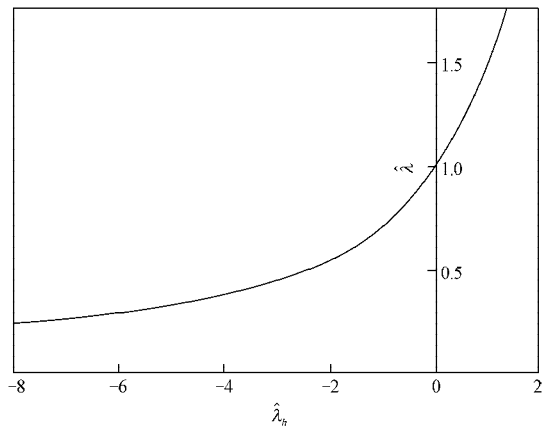


**图2　仅考虑电阻率时耗散关系$\hat\lambda$和$\hat\lambda_h$数值解**

Fig. 2　Solution of the dispersion relation of $\hat\lambda$ vs $\hat\lambda_h$ for resistivity

当2有理面之间距离足够小时，据式（22），在$|\lambda_h|\ll1$和$\hat\lambda\simeq1$的情况下，双撕裂模增长率可表示为：

$$\gamma\tau_h=\left(\alpha^2B_{0y}'^2/S\right)^{1/3}。\quad(23)$$

当2有理面之间距离足够大，且$|\lambda_h|\gg1$和$\hat\lambda\ll1$的情况下，由式（21）和式（22）可得其增长率为：

$$\gamma\tau_h\simeq\left(\frac{8\Gamma(5/4)}{\gamma_h\tau_h\Gamma(-1/4)}\right)^{4/5}\left(\frac{\alpha^2B_{0y}'^2}{S}\right)^{3/5}。\quad(24)$$

2）仅考虑由湍流引起反常电子黏滞效应而忽略电阻的情况下，双撕裂模的线性增长率。

忽略电阻时，方程式（10）和式（11）可简化为：

$$(\gamma\tau_h)^2=-\alpha^2B_{0y}{}'(x-x_s)\psi_1'',\quad(25)$$

$$\gamma\tau_h\psi_1=\gamma\tau_hB_{0y}{}'(x-x_s)\xi-\frac{1}{R}\frac{\partial^4\psi_1}{\partial x^4}。\quad(26)$$

忽略$\alpha^2$并采用变换$x-x_s\sim x,\psi_1/B_{0y}{}'\sim\psi_1,\xi\sim-\xi$，则方程式（25）和式（26）可转换为：

$$\xi''=\frac{x}{\lambda^2}\psi_1'',\quad(27)$$

$$\psi_1=-x\xi-\frac{\sigma}{\lambda}\psi_1^{(4)},\quad(28)$$

式中：$\lambda=\gamma\tau_h/\alpha B_{0y}{}',\sigma=1/R\alpha B_{0y}{}'$。

再引进函数

$$X(x)=x\psi_1{}'-\psi_1=\lambda^2\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}+X_\infty,\quad(29)$$

方程式（27）和式（28）可化为微分方程

$$\sigma\lambda\left[\frac{\mathrm{d}^4X}{\mathrm{d}x^4}-\frac{4}{x}\frac{\mathrm{d}^3X}{\mathrm{d}x^3}+\frac{8}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}-\frac{8}{x^3}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda^2+x^2\right)X=x^2X_\infty,\quad(30)$$

式中：$X_\infty$为常数，由方程式（30）解的渐进性确定。

解方程式（30）可得耗散关系为：

$$\lambda=\lambda_h\left[\frac{\hat\lambda^{5/2}}{16\times2^{\left(\frac{\hat\lambda^{5/3}}{3\times2^{4/3}}+\frac{1}{4}\right)_{\lambda=\lambda_h}}}\times\frac{\Gamma\left(\frac{\hat\lambda^{5/3}}{6\times2^{1/3}}-\frac{1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{\hat\lambda^{5/3}}{6\times2^{1/3}}+\frac{17}{12}\right)}\times F\left(-\frac{\hat\lambda^{5/3}}{6\times2^{1/3}}-\frac{3}{4},\frac{\hat\lambda^{5/3}}{6\times2^{1/3}}-\frac{1}{12},\frac{\hat\lambda^{5/3}}{6\times2^{1/3}}+\frac{17}{12},-1\right)\right],\quad(31)$$

这里$F$是hypergeometric function[7]，即

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\times\frac{z^n}{n!}。\quad(32)$$

式（31）耗散关系的数值解可用图3来表示[8]。此耗散关系仅在耗散层$\Delta\ll x_s$时才正确。

当2有理面距离足够小，且在$|\lambda_h|\ll1$和$\alpha x_s\ll1$的情况下，利用关系$\hat\lambda_h=\lambda_h/\sigma^{1/5}=\gamma_h\tau_h\left(R/\alpha^4B_{0y}'^4\right)^{1/3}$，可得双撕裂模的线性增长率为：

$$\gamma\tau_h = 0.8\left(\alpha^4 B_{0y}'^4/R\right)^{1/5}。\tag{33}$$

当2有理面距离足够大，且在$|\lambda_h| \gg 1$和$\alpha x_s \ll 1$的情况下，利用关系$\hat{\lambda}_h = \lambda_h/\sigma^{1/5} = \gamma_h\tau_h\left(R/\alpha^4 B_{0y}'^4\right)^{1/3}$，可得双撕裂模的线性增长率为：

$$\gamma\tau_h = \mathrm{const}\left(\gamma_h\tau_h\right)^{-2/3}\left(\alpha^4 B_{0y}'^4/R\right)^{1/3}。\tag{34}$$

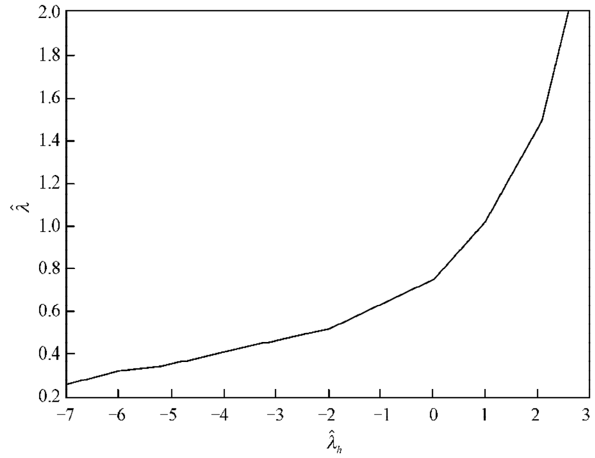


**图3 仅考虑电子黏滞时耗散关系的数值解$\hat{\lambda}$和$\hat{\lambda}_h$的关系**

Fig. 3 Solution of the dispersion relation of $\hat{\lambda}$ vs $\hat{\lambda}_h$ for electron viscosity

## 3 数值模拟

运用同一位形[9]

$$B_{0y}(x) = 1-(1+B_C)\mathrm{sech}(\xi x),\tag{35}$$

式中：$\xi x = \mathrm{arcsech}(1+B_C)^{-1}$，$B_{0y}(\pm x_s)=0$，$B_{0y}(0)=-B_C$。当$x\sim\pm\infty$时，$B_{0y}(x)\sim 1$，选择$B_C$的目的是使$B_{0y}'(x_s)=\pi/2$，图1是磁场$B_{0y}(x)$和$J_{0z}=\mathrm{d}B_{0y}(x)/\mathrm{d}x$的典型图例。

1）在考虑电阻效应忽略反常电子粘滞效应的情况下，画出$\gamma\tau_h$和$\alpha$的关系曲线，如图4。

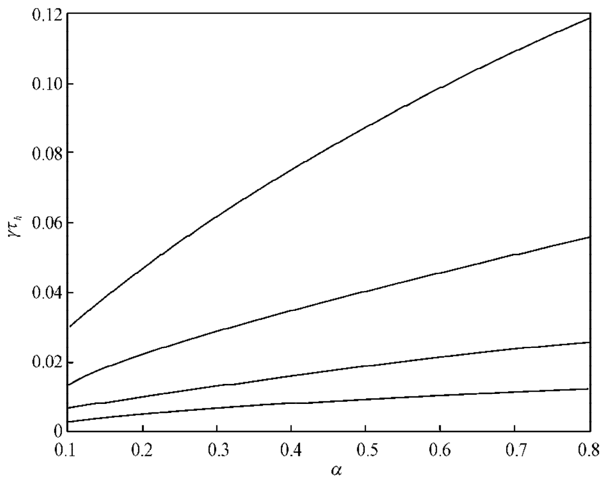


**图4 仅考虑电阻率时双撕裂模增长率$\gamma\tau_h$和$\alpha$关系**

Fig. 4 The relation of $\gamma\tau_h$ vs $\alpha$ for resistivity

图4曲线的绘制条件为：把$\gamma\tau_h$看作$\alpha$的函数，对应不同$S$值（从上自下依次为940, 9 400, 94 000, 940 000），其中$x_s$=0.25。

2）同样在考虑反常电子黏滞效应而忽略电阻的情况下，把$\gamma\tau_h$看作$\alpha$的函数，对应不同$R$值（从上自下依次为9 900, 99 000, 990 000, 9 900 000），其中$x_s$=0.25，画出$\gamma\tau_h$和$\alpha$的关系曲线，见图5。

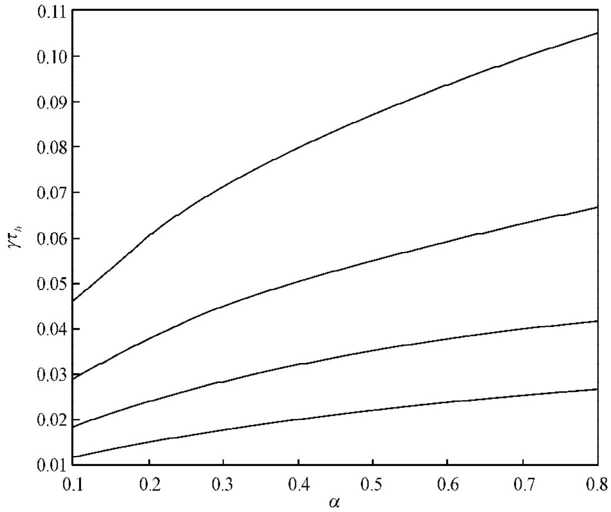


**图5 仅考虑电子黏滞时双撕裂模增长率$\gamma\tau_h$和$\alpha$关系**

Fig. 5 The relation of $\gamma\tau_h$ vs $\alpha$ for electron viscosity

## 4 结语

在具有多重有理面的等离子体中，当2有理面之间距离足够小时，磁岛会相互驱动增长。笔者通过理论分析，导出了双撕裂模的线性增长率。在考虑电阻效应忽略反常电子黏滞效应的情况下，当2有理面之间距离足够小时，双撕裂模的线性增长率$\gamma\sim S^{-1/3}\tau_h^{-1}$，反之$\gamma\sim S^{-3/5}\tau_h^{-1}$；在考虑反常电子粘滞效应而忽略电阻的情况下，当2有理面之间距离足够小时，双撕裂模的线性增长率$\gamma\sim R^{-1/5}\tau_h$，反之$\gamma\sim R^{-1/3}\tau_h$。

**参考文献：**


[1] 王晓钢. 电阻磁流体模式[R]//2008全国等离子体物理暑期学校讲义. 合肥：中国科技大学，2008：8-10.
Wang Xiaogang. MHD Modes[R]//National 2008 Plasma Physics Summer School Lectures. Hefei：University of Science and Technology of China，2008：8-10.

[2] Futh H P，Killeen J，Rosenbluth M N. Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch[J]. Physics of Fluids，1963，6(4)：459-484.

[3] Kaw P K, Valeo E J, Ruthford P H. Tearing Modes in a Plasma with Magnetic Braiding[J]. Phys. Rev. Lett., 1979，43：1398-

1401.

[4] Drake J F. Kinetic Theory of $m$=1 Internal Instabilities[J]. Physics of Fluids, 1978, 21(10)：1777-1789.

[5] White R B. Resistive Instabilities and Field Reconnection[M]. Rosenbluth M N, Galeev R Z, Edited. Amsterdam：North-Holland Publishing Company, 1983：611-677.

[6] Pritchett P L, Lee Y C, Drake J F. Linear Analysis of the Double-Tearing Mode[J]. Physics of Fluids, 1980, 23(7)：1368-1374.

[7] Oberhettinger F. Hypergeometric Functions[M]. Abramowitz M, Stegun I A，Edited. New York：Dover Publication，1986：555-565.

[8] Dong J Q, Mahajan S M, Horton W. Double Tearing Mode in Plasmas with Anomalous Electron Viscosity[J]. Physics of Plasmas，2003，10(8)：3151-3159.

[9] Schnack D，Killeen J. Theoretical and Computational Plasma Physics[M]. Vienna: International Atomic Energy Agency，1978：337-360.

（责任编辑：李玉珍）

（上接第 28 页）

[5] 彭炎荣，段继承，江　荧，等. 宽板弯曲过程中板厚的变化规律[J]. 模具技术，2003，121(1)：10-12.
Peng Yanrong, Duan Jicheng, Jiang Ying, et al. Law of Thickness Variation in the Wide Sheet Bending[J]. Die and Mould Technology, 2003，121(1)：10-12.

[6] 戴宏胜，龚曙光，彭炎荣，等. 宽板塑性弯曲应变增量中性层的分析[J]. 塑性工程学报，2010，17(3)：81-84.
Dai Hongsheng, Gong Shuguang, Peng Yanrong, et al. Study on the Strain-Increment Neutral Layer in Wide Sheet Plastic Bending[J]. Journal of Plasticity Engineering, 2010, 17(3)：81-84.

[7] 江　荧，罗文波，彭　定，等. 关于理想塑性板材弯曲变薄理论解的矛盾及原因分析[J]. 塑性工程学报，2006，13(1)：26-28.
Jiang Ying, Luo Wenbo, Peng Ding, et al. Contradiction of Theoretical Solution and the Reasons about Thickness Variation of Ideal Plastic Metal Sheet Bending[J]. Journal of Plasticity Engineering, 2006, 13(1)：26-28.

[8] 江　荧，罗文波，彭　定，等. 关于宽板塑性弯曲变薄理论解的讨论[J]. 金属成形工艺，2004，22(3)：30-32.
Jiang Ying, Luo Wenbo, Peng Ding, et al. Discuss on Theoretical Solution of Thickness Variation for Wide Sheet Plastic Bending [J]. Metal Forming Technology, 2004, 22(3)：30-32.

[9] 贺广零，卢晋福，桂海林，等. 宽板弯曲成形过程中的板厚变化规律[J]. 塑性工程学报，2006，13(6)：48-51.
He Guangling, Lu Jinfu, Gui Hailin, et al. Law of Thickness Variation in the Wide Sheet Bending[J]. Journal of Plasticity Engineering, 2006, 13(6)：48-51.

（责任编辑：李玉珍）