Markov链的一种随机时间替换

莫晓云

（湖南财政经济学院，湖南 长沙 410205）

摘 要：研究Markov链的一种随机时间替换，这种替换有别于通常的Markov过程理论中的随机时间替换。通常的Markov过程的随机时间替换，是通过Markov过程的可加泛函来实现的。而现在，被随机时间替换的过程$X=\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$是一个时间离散的、状态空间可数的、时间齐次的Markov链，用于随机时间替换的过程$\tau=\{\tau_t,t\geq 0\}$是一个时间连续的、状态空间为非负整数集的、不降的、空间齐次的Markov链，而且X与τ独立。证明了随机时间替换后的过程$Y=\{Y(t),t\geq 0\},Y(t)=X(\tau_t)$，是一个Markov链；并求出了$Y$的转移概率；当$\tau$是时间齐次时，$Y$也是时间齐次的。

关键词：Markov链；随机时间替换；时间齐次性；空间齐次性；转换概率

中图分类号：O211.62 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2010)06-0031-03

A Sort of Random Time-Change for Markov Chain

Mo Xiaoyun

（Hunan University of Finance and Economics，Changsha 410205，China）

Abstract: Researches a sort of random time-change for Markov chain, which is different from random time-change of ordinary Markov process theory. It is realized by additive functional of the Markov process. The process $X=\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$ which will be random time-substituted is a time-discrete, countable state space and time-homogeneous Markov chain, and the process $\tau=\{\tau_t,t\geq 0\}$ which will be used to substitute is a time-continuous, non-decreasing and space-homogeneous Markov chain with the state-space constituting of non-negative integers in addtion, X and τ are mutually independent. It is proved that the random time-changed process $Y=\{Y(t),t\geq 0\},Y(t)=X(\tau_t)$ is a Markov chain, whose transition probabilities are calculated. If τ is time-homogeneous, then Y is also time-homogeneous.

Keywords: Markov chain; random time-change; time-homogeneity; space-homogeneity; transition probabilities

0 引言

Markov过程$X=\{X(t),t\geq 0\}$的随机时间替换已有较深入的研究，被随机时间替换的过程是一般的Markov过程，而用于随机时间替换的过程是由依赖于Markov过程X的可加泛函$\varphi=\{\varphi_t,t\geq 0\}$获得的，即$Y=\{Y(t),t\geq 0\},Y(t)=X(\tau_t)$，而$\tau_t=\varphi_t^{-1}$表示反函数，过程$\tau$和过程$X$有关。可以证明，在一定的条件下，$Y$仍然是一个Markov过程。上述的Markov过程的随机时间替换涉及到Markov过程的许多高等的概念和理论，这方面的文献较多[1-4]。然而，笔者在研究中遇到了一种随机时间替换问题，它和上面涉及可加泛函的随机时间替换是不同的，其特点是：第一，被随机时间替换的过程不是连续时间的、一般状态空间的Markov过

收稿日期：2010-09-01

基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871064），湖南省教育厅科研基金资助项目（09C011），湖南省高校重点实验室开放基金资助项目（09K026）

通信作者：莫晓云（1972-），女，湖南岳阳人，湖南财政经济学院讲师，硕士，主要研究方向为经济数学和Markov链及其应用，E-mail：moxyun72@163.com

程$X=\{X(t),t\geq 0\}$，而是时间离散的、状态空间可数的Markov链$X=\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$。第二，用于随机时间替换的过程$\tau=\{\tau_t,t\geq 0\}$是时间连续的、非负整数值的、不降的Markov链，它不牵涉可加泛函，与X无关，即τ与X独立。第三，本文的讨论不需要Markov过程的较高等的理论框架，而是在较初等的框架下进行的。很自然的问题是，随机时间替换后的过程$Y=\{Y(t),t\geq 0\}$，$Y(t)=X(\tau_t)$，是否为Markov链？本文在适当的、合理的假设下给出答案，而且求出了Y的转移概率，当τ是时间齐次时，Y也是时间齐次的。

1 问题的提出

可以假设，在某个概率空间$(\Omega,\Im,P)$上，给定下面的2个Markov链[5-6]。

1）离散时间Markov链$X=\{X(n),\ n=0,1,2,\cdots\}$，其状态空间为可数集$S$，链于第$n(n\geq 0)$步时的$k(k\geq 0)$步转移概率记为

$$ {}_nP_{ij}^{(k)}=P(X(n+k)=j\mid X(n)=i), $$

式中，$i,j\in S$；$k=0,1,2,\cdots$；${}_nP_{ij}={}_nP_{ij}^{(1)}$。

2）连续时间Markov链$\tau=\{\tau_t,t\geq 0\}$，其状态空间为$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$，$\tau$不降，即对任意$0\leq s<t$有$P(\tau_s\leq\tau_t)=1$，其转移概率记为

$$ R_{mn}(s,t)=P(\tau_t=n\mid\tau_s=m),\quad 0\leq s<t,\ m,n\in\mathbf{N}。$$

3）2个Markov链X与τ独立。问$Y=\{Y(t),t\geq 0\}$，$Y(t)=X(\tau_t)$是否为Markov链？

2 随机时间替换后链的Markov性

定理1 对第1节中给定的2个Markov链X与τ，假设：

1）X是时间齐次的，即${}_nP_{ij}\equiv P_{ij}$与$n(n\geq 0)$无关。

2）τ是空间齐次的，即

$$ R_{m,m+k}(s,t)\equiv\gamma_k(s,t),\ m,k\in\mathbf{N} \tag{1} $$

与$m(m\geq 0)$无关。

则随机时间替换后的过程$Y=\{Y(t),t\geq 0\}$，$Y(t)=X(\tau_t)$是连续时间的、状态空间为S的Markov链，其转移概率记为

$$ Q_{ij}(s,t)=P(Y(t)=j\mid Y(s)=i),\quad 0\leq s\leq t,\ i,j\in S, $$

则有：

$$ Q_{ij}(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ij}^{(k)}\gamma_k(s,t); \tag{2} $$

进一步，如果τ是时间齐次的，则Y也是时间齐次的，此时转移概率记为

$$ Q_{ij}(t)=P(Y(s+t)=j\mid Y(s)=i),\quad s,t\geq 0,\ i,j\in S, $$

则有：

$$ Q_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ij}^{(k)}\gamma_k(t), \tag{3} $$

式（3）中$\gamma_k(t)=\gamma_k(s,s+t)$与$s\geq 0$无关。

证明 设$n\geq 1,\ i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_n,\ i_{n+1}\in S,\ 0\leq t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$，简记求和号

$$ \sum{}^{(n)}=\sum_{0\leq m_0\leq m_1\leq\cdots\leq m_n}=\sum_{m_n=m_{n-1}}^{\infty}\cdots\sum_{m_1=m_0}^{\infty}\sum_{m_0=0}^{\infty}。$$

由于τ不降，故有下面的式（4）：

$$ \begin{aligned} &P\left(Y(t_0)=i_0,\cdots,Y(t_{n+1})=i_{n+1}\right)=\\ &\quad\sum{}^{(n+1)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_{n+1})=i_{n+1},\right.\\ &\quad\left.\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_{n+1}}=m_{n+1}\right)。\end{aligned} \tag{4} $$

由于X与τ独立，式（4）右边等于

$$ \begin{aligned} &\sum{}^{(n+1)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_{n+1})=i_{n+1}\right)\cdot\\ &\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_{n+1}}=m_{n+1}\right)。\end{aligned} \tag{5} $$

由于X和τ的Markov性，式（5）等于

$$ \begin{aligned} &\sum{}^{(n+1)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_n)=i_n\right)\cdot{}_nP_{i_ni_{n+1}}^{(m_{n+1}-m_n)}\cdot\\ &\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)\cdot R_{m_nm_{n+1}}(t_n,t_{n+1})。\end{aligned} \tag{6} $$

由于X的时间齐次性和τ的空间齐次性，式（6）等于

$$ \begin{aligned} &\sum{}^{(n+1)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_n)=i_n\right)\cdot\\ &\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)\cdot\\ &\quad P_{i_ni_{n+1}}^{(m_{n+1}-m_n)}\cdot\gamma_{m_{n+1}-m_n}(t_n,t_{n+1})=\\ &\quad\sum_{m_{n+1}=m_n}^{\infty}\sum{}^{(n)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_n)=i_n\right)\cdot\\ &\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)\cdot\\ &\quad P_{i_ni_{n+1}}^{(m_{n+1}-m_n)}\cdot\gamma_{m_{n+1}-m_n}(t_n,t_{n+1})=\\ &\quad\sum{}^{(n)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_n)=i_n\right)\cdot\\ &\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)\cdot\\ &\quad\sum_{m_{n+1}=m_n}^{\infty}P_{i_ni_{n+1}}^{(m_{n+1}-m_n)}\cdot\gamma_{m_{n+1}-m_n}(t_n,t_{n+1})=\\ &\quad\sum{}^{(n)}P\left(X(m_0)=i_0,\cdots,X(m_n)=i_n\right)\cdot\\ &\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}P_{i_ni_{n+1}}^{(k)}\cdot\gamma_k(t_n,t_{n+1})。\end{aligned} \tag{7} $$

于是，式（4）左边等于式（7）的最右边。

由于式（4）对任何的n成立，因此，在式（4）中用n取代$n+1$后，得下面式子中的第1个等号，即

$$
\begin{aligned}
&P\left(Y\left(t_0\right)=i_0,\cdots,Y\left(t_n\right)=i_n\right)=\\
&\quad\sum{}^{(n)}P\left(X\left(m_0\right)=i_0,\cdots,X\left(m_n\right)=i_n,\right.\\
&\quad\left.\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)=\\
&\quad\sum{}^{(n)}P\left(X\left(m_0\right)=i_0,\cdots,X\left(m_n\right)=i_n\right)\cdot\\
&\quad P\left(\tau_{t_0}=m_0,\cdots,\tau_{t_n}=m_n\right)。
\end{aligned}
\tag{8}
$$

式（8）的第2个等号成立是由于X与τ独立。

由于式（8）和式（2）成立，因此式（7）的最右边可以写成

$$P\left(Y\left(t_0\right)=i_0,\cdots,Y\left(t_n\right)=i_n\right)\cdot Q_{i_n i_{n+1}}\left(t_n,t_{n+1}\right)。\tag{9}$$

这样，式（4）左边等于式（7）最右边，从而式（4）的左边等于式（9），即

$$
\begin{aligned}
&P\left(Y\left(t_0\right)=i_0,\cdots,Y\left(t_{n+1}\right)=i_{n+1}\right)=\\
&\quad P\left(Y\left(t_0\right)=i_0,\cdots,Y\left(t_n\right)=i_n\right)\cdot Q_{i_n i_{n+1}}\left(t_n,t_{n+1}\right),
\end{aligned}
$$

这说明，Y是Markov链，其转移概率是式（2）。

进一步，如果假设Markov链τ是时间齐次的，即$\gamma_k(s,s+t)=\gamma_k(t)$与$s\geq 0$无关，则$Q_{ij}(s,s+t)=\sum_{k=0}^{\infty}P_{ij}^{(k)}\gamma_k(s,s+t)$也与$s\geq 0$无关，式（2）成为式（3），从而$Y$也是时间齐次的，其转移概率为式（3）。定理证毕。

注意，如果$\tau=\{\tau_t,t\geq 0\}$是时间齐次的或非齐次的Poisson过程，甚至是广义的Poisson过程，此时式（1）成立，即τ是空间齐次的。

参考文献：

[1] Ikeda N，Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes[M]. Amsterdam：North-Holland Publishing Company，1981.

[2] 基赫曼，斯科罗霍德. 随机过程论：第2卷[M]. 周概容，刘嘉焜，译. 北京：科学出版社，1986.

Gihman I I，Skorohod A V. The Theory of Stochastic Processes：Second Volume[M]. Zhou Gairong，Liu Jiakun，Translated. Beijing：Science Press，1986.

[3] 王梓坤. 随机过程与今日数学[M]. 北京：北京师范大学出版社，2005.

Wang Zikun. Stochastic Processes and Today's Mathematics [M]. Beijing：Beijing Normal University Press，2005.

[4] Karatzas I，Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus[M]. 2nd ed. Berlin：Springer-Verlag，1991.

[5] 王梓坤. 随机过程通论：上卷[M]. 北京：北京师范大学出版社，2010.

Wang Zikun. General Survey of Stochastic Processes：Volume A[M]. Beijing：Beijing Normal University Press，2010.

[6] 莫晓云. 用独立乘积空间构造相依随机变量的组装法[J]. 湖南师范大学自然科学学报，2010，33 (2)：19-23.

Mo Xiaoyun. Assembly Method Constructing Dependent Random Variables with Independent Product Space[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University，2010，33 (2)：19-23.

（责任编辑：邓光辉）

（上接第8页）

Journal of Hunan University：Natural Science，2003，30 (6)：41-44.

[15] Li S，Wang R J，Pan M X，et al. Heavy Rare Earth Based Bulk Metallic Glasses with High Thermal Stability[J]. Intermetallics，2006，14(6)：592-595.

[16] He S W，Liu Y，Li Z T，et al. Thermal Stability and Crystallization Kinetics in Y-Based Metallic Glasses[J]. Metallurgical and Materials Transactions：A，2008，39(8)：1797-1803.

[17] 赵作峰，张　志，李　正，等. 新型Pr基大块非晶及其特性研究[J]. 物理学报，2004，53(3)：850-853.

Zhao Zuofeng，Zhang Zhi，Li Zheng，et al. A New Pr-Based Bulk Metallic Glass and Its Properties[J]. Acta Physica Sinica，2004，53(3)：850-853.

[18] Angell C A. Relaxation in Liquids，Polymers and Plastic Crystals-Strong/Fragile Patterns and Problems[J]. Journal of Non-Crystalline Solids，1991，131/132/133：13-31.

[19] 刘佐权，赵鹤云，吕毓松，等. 非晶合金激波晶化的DSC研究[J]. 金属功能材料，2001，8(3)：30-34.

Liu Zuoquan，Zhao Heyun，Lv Yusong，et al. Study of Amorphous Alloys of Shock Wave Crystallization by DSC [J]. Metallic Functional Materials，2001，8(3)：30-34.

[20] 赵鹤云，阚家德，王　海，等. FeCuNbBSi等多种Fe基非晶态合金激波晶化的DSC研究[J]. 高压物理学报，2002，16(2)：131-135.

Zhao Heyun，Kan Jiade，Wang Hai，et al. Shock Wave Crystallization of Amorphous Alloys FeSiB, FeMoSiB and FeCuNbSiB[J]. Chinese Journal of High Pressure Physics，2002，16(2)：131-135.

（责任编辑：邓光辉）