第24卷第5期
2010年9月

湖南工业大学学报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.5
Sep. 2010

反常积分的定义问题

邓光辉，刘东南，徐承杰

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：针对目前高等数学和数学分析教材中，在处理反常积分这一内容时出现的问题，对反常积分的定义问题进行了探讨，提出了解决问题的对策。

关键词：反常积分；广义积分；定积分；定义

中图分类号：G642　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)05-0092-03

Definition of Improper Integral

Deng Guanghui，Liu Dongnan，Xuchengjie

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Aiming at improper integrals problems in the textbooks of higher mathematics and mathematical analysis, the definition of improper integral are discussed and the countermeasures to solve the problems are put forward.

Keywords：improper integral；generalized integral；definite integral；definition

目前，国内高等数学和数学分析教材种类繁多，在编写反常积分或广义积分这一内容时，对“反常积分”或“广义积分”的概念都没有给出明确的定义；一般只对下面所述定义1中，反常积分前面的2种情形给出定义。不同教材对概念名称的使用，以及对2种情形的定义又不尽相同。特别是有的定义比较啰嗦，有的比较深奥，有的以偏概全，有的还自相矛盾。总之，这部分内容的编写很混乱，给教育工作者带来一些不便，特别是给初学者带来很多困惑。为此，笔者作了一些探讨，提出了自己的拙见与同仁们商榷。

1 反常积分和广义积分的定义

1.1 定义

“定积分”（或称“常义积分”）的定义有2个必要条件：

①积分区间$[a, b]$有限；

②被积函数在积分区间$[a, b]$上有界。

笔者对文献[1-6]以及其它文献进行了仔细的研读和分析，归纳出如下2个定义。

定义1 如果条件①和条件②至少1个不满足，这种“积分” 称为反常积分。

定义2 如果将条件①中有限积分区间推广到无限区间，或将条件②中被积函数在积分区间上有界推广到无界，这种“积分” 称为广义积分。

1.2 定义的分析与比较

定义1中“反常积分”的内涵是：违反定积分条件的积分；外延是以下3种情形的积分：

1）积分区间无限，但被积函数在积分区间上有界；

2）积分区间有限，但被积函数在积分区间上无界；

3）积分区间无限，且被积函数在积分区间上无界。

按通常的理解，“推广”就是使事物的使用范围或起作用的范围扩大，推广后的范围应该包含推广前的范围。例如：数的概念由自然数推广到整数，由整数推广到有理数，由有理数推广到实数，由实数推广到复数，每一次推广都包含了原有的部分。

定义2中“广义积分”的内涵是：将定积分条件

收稿日期：2010-07-09

通信作者：邓光辉（1964-），男，湖南益阳人，湖南工业大学副教授，主要从事数学教学与研究，E-mail：385829951@qq.com

推广的积分。推广后的部分应该是包含原有的部分，否则就不能说是“推广”而应说是“改为”。因此，定义 2 中“广义积分”的外延是：定积分和反常积分。

显然，在定义 1 和定义 2 中，反常积分与广义积分从内涵到外延都不相同，前者的外延小于后者。因此，它们是 2 个不同的概念，不能理解为是 2 个等价的概念。

2　教材中存在的问题

2.1　概念与内容的问题

不同教材中，对概念名称的使用和内容的编排比较混乱。一是，将“反常积分”错误地理解为与“广义积分”是等价的概念，从而在名称使用上“反常积分”与“广义积分”相互替代；二是，反常积分应包括哪几种类型的积分不明确。常见的有以下几种情况。

1）默认定义 1，使用的是“反常积分”的名称，讲述的是定义 1 中前面 2 类积分[1]；

2）默认定义 1，使用的是“广义积分”的名称，讲述的是定义 1 中前面 2 类积分[2]；

3）默认定义 2，使用的是“反常积分”的名称，讲述的是定义 1 中前面 2 类积分[3]；

4）默认定义 2，使用的是“反常积分”的名称，讲述的是定义 1 中全部 3 类积分[4]；

5）默认定义 2，使用的是“广义积分”的名称，讲述的是定义 1 中前面 2 类积分[5]。

2.2　2 类反常积分的定义问题

定义一个概念，要求定义中的语言（文字）通俗、简练、准确，定义中的条件是充分而且必要的。但是很多教材的定义存在问题，值得商榷。在此举例说明。

2.2.1　无穷区间上的反常积分

定义 3[4]　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$。这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 就没意义，习惯上称为反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，这时记号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不再表示数值了。

该定义存在 2 个问题：

1）定义冗长。

2）前后矛盾[7]。因为第一部分“如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$”，应理解为：无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，就是极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在时的极限值；而定义中的条件是充分而且必要的，因此，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 不存在就不能称为无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，也不能记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$。第二部分“如果上述极限不存在就称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散”，显然从名称到记号都与第一部分相矛盾。

定义 4[5]　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，记号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分。取 $t>a$，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并把此极限值称为广义积分的值，即有 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$。如果上述极限不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，这时记号不再表示数值了。

该定义也存在 2 个问题：

1）定义冗长。

2）不通俗。定义中“记号 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上的广义积分。”这是用一个不知其含义的新符号来定义一个新概念，虽然后面用了冗长的文字和符号加以说明，但还是难以理解。

2.2.2　无界函数的反常积分

定义 5[4]　与定义 3 定义的方式类似。

存在的问题与定义 3 相同。

定义 6[5]　与定义 4 定义的方式类似。

存在的问题与定义 4 相同。

定义 7[2-3，6-7]　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$。取 $t>a$，把极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为无界函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，仍然记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$。如果极限存在，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果极限不存在就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

定义 7 与定义 5 和定义 6 相比，虽然简练、通俗也没有矛盾之处，但犯了以偏概全的错误，因为定义中的条件“$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$”与“$f(x)$ 在点 a 的右邻域内无界”不等价。若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty\Rightarrow f(x)$ 在点 a 的右邻域内无界；而 $f(x)$ 在点 a 的右邻域内无界 $\nRightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$。

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的右邻域内无界，但 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\infty$；从而 $\int_0^1\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ 是定义 5 和定义 6 下的反常积分，但不是定义 7 下的反常积分。

3 问题产生的原因及解决的对策

3.1 原因

对反常积分这一部分内容的编写，出现混乱局面的原因，主要有2点。一是，"反常积分"与"广义积分"的概念没有明确而又权威的定义；二是，现在教材等出版物很多，一些作者为了突出作品的特色，或表明作品是自己创作的结果而非抄袭物，刻意将一些概念定义得与众不同。

笔者认为一些传统的、经典的内容在没有找到更好的表述之前，不要轻易去改变它。

3.2 对策

不难看出，文献[1-7]的所有编者认为，他们理解的反常积分或广义积分都不包含定积分，即这2个概念都是指定义1中的反常积分。大多数编者认为，反常积分与广义积分是同一个概念，反常积分或广义积分就是指定义1中前面2类积分。

鉴于大多数学者对这一部分内容的理解和认识，再结合本文前面的探讨，笔者认为把这一部分内容称为"广义积分"是不恰当的，应该称为"反常积分"。这种认识，要成为教材的编写者和其他数学教育工作者的共识，尽快改变不同教材在这一内容编写中的混乱状况，并按如下方式编写。

先按定义1给出反常积分的概念，并说明有3种情形，再重点讲述前面2种情形，最后简要点明第3种情形。对无穷区间上的反常积分和无界函数的反常积分，按下面的定义8和定义9给出。

定义8 设函数$f(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续，取$t > a$，把极限$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$称为函数$f(x)$在无穷区间$[a, +\infty)$上的反常积分，记为$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$。如果极限存在，称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果极限不存在，就称反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

无穷区间$(-\infty, b]$上的反常积分，按定义8类似给出。

定义9 设函数$f(x)$在区间$(a, b]$上连续，而在点a的右邻域内无界。取$t > a$，把极限$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$称为无界函数$f(x)$在区间$(a, b]$上的反常积分，仍然记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$。如果极限存在，称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果极限不存在就称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散。

区间$[a, b)$上无界函数的反常积分，按定义9类似给出。

4 结语

在编写反常积分这一内容时，按3.2节中所述的方法处理，能解决文献[1-7]等许多教材中出现的问题。从而使这部分内容结构合理、逻辑性强，概念叙述通俗、准确、精炼；有利于教师教学，更有利于学生理解概念和掌握知识。

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 3版. 北京：高等教育出版，2001.
Department of Mathematics of East China Normal University. Mathematical Analysis[M]. 3rd ed. Beijing： Higher Education Press，2001.

[2] 盛祥耀，潘鹊屏，黄奕佗，等. 高等数学[M]. 北京：高等教育出版社，1992.
Sheng Xiangyao，Pan Queping，Huang Yituo，et al. Higher Mathematics[M]. Beijing：Higher Education Press，1992.

[3] 李天然，江建春，李金丹，等. 高等数学[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2008.
Li Tianran，Jiang Jianchun，Li Jindan，et al. Higher Mathematics[M]. 2nd ed. Beijing：Higher Education Press，2008.

[4] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 5版. 北京：高等教育出版，2002.
Department of Applied Mathematics of Tongji University. Higher Mathematics[M]. 5th ed. Beijing：Higher Education Press，2002.

[5] 彭富连，刘迪芬，昌国良，等. 高等数学[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2006.
Peng Fulian，Liu Difen，Chang Guoliang，et al. Higher Mathematics[M]. Changsha：Hunan Normal University Press，2006.

[6] 王国政，刘璟忠，黎国玲，等. 高等数学[M]. 上海：復旦大学出版社，2007.
Wang Guozheng，Liu Jingzhong，Li Guoling，et al. Higher Mathematics [M]. Shanghai：Fudan University Press，2007.

[7] 赵士银，周 坚. 关于广义积分定义的一个注记[J]. 高等数学研究，2002，5(4)：14.
Zhao Shiyin，Zhou Jian. A Note of Generalized Integral on the Definition[J]. Studies in College Mathematics，2002，5(4)：14.

（责任编辑：李玉珍）