第24卷 第5期　　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　　Vol.24 No.5
2010年9月　　　Journal of Hunan University of Technology　　　Sep. 2010

n阶常系数非齐次线性微分方程特解的统一求法

陈华喜

（蚌埠学院数理系，安徽 蚌埠 233030）

摘　要：对于n阶常系数非齐次线性微分方程$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$，当$f(x)$分别为$P_m(x)$，$P_m(x)e^{\lambda x}$和$\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right)e^{\lambda x}$时，给出了求特解的统一方法："降阶法"，有别于大多数《常微分方程》教材中的传统方法："待定系数法"。

关键词：线性微分方程；求导；特解

中图分类号：O175.1　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1673-9833(2010)05-0042-03

One Unified Method for Particular Solution of n Order Constant Coefficient Non-Homogeneous Linear Differential Equation

Chen Huaxi

（Mathematics and Physics Department of Bengbu College，Bengbu Anhui 233030, China）

Abstract：As for n order constant coefficient non-homogeneous linear differential equation $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$, when $f(x)$ is $P_m(x)$, $P_m(x)e^{\lambda x}$, and $\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right)e^{\lambda x}$，one unified method for particular solution："reduction method" is provided，which is different from the traditional method of "undetermined coefficients" in most textbooks of *Ordinary Differential Equations*.

Keywords：linear differential equations; derivation; particular solution

设n阶常系数非齐次线性微分方程为：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \tag{1}$$

式中：$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数；

$f(x)$为连续函数。

设n阶常系数齐次线性微分方程为：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{2}$$

由微分方程解的结构定理[1-2]知，方程（1）的通解，等于对应的齐次方程（2）的通解与自己的1个特解之和。方程（2）的通解易求，因此，求方程（1）的通解，关键是求方程（1）的1个特解。目前，大多数《常微分方程》教材是对$f(x)$分别为$P_m(x)$，$P_m(x)e^{\lambda x}$和$\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right)e^{\lambda x}$，以及特征根的各种情况分别设定相应的特解函数，用待定系数法求特解。该方法较繁琐，而且情形较多，难以记忆，不利于初学者掌握。为此，笔者对上述3种类型给出1种统一的求特解的方法："降阶法"[3-5]。

1　求特解的统一方法

类型I　$f(x)=P_m(x)$的情形。

当$f(x)=P_m(x)$时，方程（1）为：

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=P_m(x), \tag{3}$$

收稿日期：2010-07-04

通信作者：陈华喜（1977-），男，安徽淮南人，蚌埠学院讲师，硕士，主要研究方向为微分方程及代数学，

E-mail：bbchx7@163.com

式（3）中$P_m(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0$是$m$次多项式。

方程（3）两边对x依次求m阶导数，先求一阶导数可得：

$$y^{(n+1)}+a_1 y^{(n)}+\cdots+a_{n-2}y'''+a_{n-1}y''+a_n y'=$$
$$mb_m x^{m-1}+(m-1)b_{m-1}x^{m-2}+\cdots+2b_2 x+b_1\text{，}\tag{4}$$

求二阶导数得：

$$y^{(n+2)}+a_1 y^{(n+1)}+\cdots+a_{n-2}y^{(4)}+a_{n-1}y^{(3)}+a_n y^{(2)}=$$
$$m(m-1)b_m x^{m-2}+(m-1)(m-2)b_{m-1}x^{m-3}+\cdots+2b_2\text{，}\tag{5}$$

$$\vdots$$

求$m-1$阶导数得：

$$y^{(n+m-1)}+a_1 y^{(n+m-2)}+\cdots+a_{n-2}y^{(m+1)}+a_{n-1}y^{(m)}+$$
$$a_n y^{(m-1)}=m!b_m x+(m-1)!b_{m-1}\text{，}\tag{6}$$

求m阶导数得：

$$y^{(n+m)}+a_1 y^{(n+m-1)}+\cdots+a_{n-2}y^{(m+2)}+$$
$$a_{n-1}y^{(m+1)}+a_n y^{(m)}=m!b_m\text{。}\tag{7}$$

当$a_n\neq 0$时，方程（1）有不高于m次的多项式特解，故$y^{(n+m)}=y^{(n+m-1)}=\cdots=y^{(m+2)}=y^{(m+1)}=0$，因而在式（7）中有$a_n y^{(m)}=m!b_m$，即得$y^{(m)}=\dfrac{b_m}{a_n}m!$；将$y^{(m)}$代入式（6）可求得$y^{(m-1)}$；再将$y^{(m)}$，$y^{(m-1)}$代入上一级式子可得$y^{(m-2)}$；依此下去，最终可求得特解$y$。

当$a_n=\cdots=a_{k-1}=0$，$a_k\neq 0$，$k<n$时，方程（3）即为：

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_k y^{(n-k)}=P_m(x)\text{，}\tag{8}$$

此时，令$y^{(n-k)}=z$，则方程（8）变为：

$$z^{(k)}+a_1 z^{(k-1)}+\cdots+a_k z=P_m(x)\text{，}\tag{9}$$

方程（9）称为降阶方程[6]，其解法同方程（3）中$a_n\neq 0$的情况。求出z后，再对z进行$n-k$次积分便可求出方程（8）的特解y。

类型 II　$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$的情形。

当$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$时，令$y=u(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$是方程（1）的解，代入方程（1）化简后得类型 I 的方程，按类型 I 的方法求出特解，从而求出原方程（类型 II）的特解。

类型 III　$f(x)=\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right)\mathrm{e}^{\lambda x}$的情形。

当$f(x)=\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right)\mathrm{e}^{\lambda x}$时，构造方程：

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=$$
$$P_m^{(1)}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\cos\beta x\text{，}\tag{10}$$

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=$$
$$P_m^{(2)}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\sin\beta x\text{，}\tag{11}$$

$$z^{(n)}+a_1 z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}z'+a_n z=$$
$$P_m^{(1)}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}=P_m^{(1)}(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\beta)x}\text{，}\tag{12}$$

$$z^{(n)}+a_1 z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}z'+a_n z=$$
$$P_m^{(2)}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}=P_m^{(2)}(x)\mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\beta)x}\text{。}\tag{13}$$

对方程（12），（13）可按类型 II，转化成类型 I 后，按类型 I 的方法求出特解。方程（12）特解的实部就是方程（10）的特解y_1；方程（13）特解的虚部就是方程（11）的特解y_2。根据特解的叠加原理知，$y=y_1+y_2$是方程（1）的特解。

2　求特解举例

例 1　求方程$y'''+6y''+6y=x^3+2x+1$的特解。

解　方程两边分别对x求一至三阶导数有：

$$y^{(4)}+6y^{(3)}+6y'=3x^2-2\text{，}\tag{14}$$

$$y^{(5)}+6y^{(4)}+6y''=6x\text{，}\tag{15}$$

$$y^{(6)}-6y^{(5)}+6y^{(3)}=6\text{。}\tag{16}$$

因为原方程右边是 3 次多项式，从而有：

$$y^{(6)}=y^{(5)}=y^{(4)}=0\text{，}$$

由式（16），（15）得：

$$y^{(3)}=1\text{，}y''=x\text{，}\tag{17}$$

将式（17）代入原方程，得方程的 1 个特解为：

$$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{2}{3}x\text{。}$$

例 2　求方程$y''+6y'+13y=\mathrm{e}^x\left(x^2-5x+2\right)$的 1 个特解。

解　令$y=u(x)\mathrm{e}^x$，　(18)

则　$y'=u'(x)\mathrm{e}^x+u(x)\mathrm{e}^x$，　(19)

$$y''=u''(x)\mathrm{e}^x+2u'(x)\mathrm{e}^x+u(x)\mathrm{e}^x\text{。}\tag{20}$$

将式（18），（19），（20）代入原方程得：

$$u''(x)+8u'(x)+20u(x)=x^2-5x+2\text{。}\tag{21}$$

方程（21）是例 1 的情形，按例 1 的降阶法得方程的特解为：$u(x)=\dfrac{1}{20}x^2-\dfrac{29}{100}x+\dfrac{211}{100}$，

所以原方程的特解为：

$$y=\left(\frac{1}{20}x^2-\frac{29}{100}x+\frac{211}{100}\right)\mathrm{e}^x\text{。}$$

例 3　求方程$y''-2y'+2y=x\mathrm{e}^x\cos x$的 1 个特解。

解　求原方程的特解等价于求方程：

$$z''-2z'+2z=x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\tag{22}$$

的特解的实部。

令$z=u(x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$，　(23)

从而$z'=u'(x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+(1+\mathrm{i})u(x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$，　(24)

$$z''=u''(x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+2(1+\mathrm{i})u'(x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+2\mathrm{i}u(x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\text{。}\tag{25}$$

将式（23），（24），（25）代入方程（22）得：

$$u''(x)+2\mathrm{i}u'(x)=x。\tag{26}$$

方程（26）是例1的情形，按例1的降阶法得方程的特解为：

$$u(x)=-\frac{1}{4}\mathrm{i}x^2+\frac{1}{4}x。\tag{27}$$

将式（27）代入式（23）得：

$$z=\left(-\frac{1}{4}\mathrm{i}x^2+\frac{1}{4}x\right)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=$$

$$\left(-\frac{1}{4}\mathrm{i}x^2+\frac{1}{4}x\right)(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\mathrm{e}^x=$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(x^2\sin x+x\cos x\right)+\mathrm{i}\left(x\sin x-x^2\cos x\right)\right]\mathrm{e}^x。$$

所以原方程的特解为：

$$y=\frac{1}{4}\left(x^2\sin x+x\cos x\right)\mathrm{e}^x。$$

3 结语

上述求 n 阶常系数非齐次线性微分方程特解的方法是：先将类型II和类型III作适当代换，转化为类型I，再按类型I的“降阶法”求解。这种方法不仅是3种类型求特解的统一方法，而且求解时不需要讨论特征根的各种情形，求解的过程不需用难记的公式和深奥的知识。它是一种容易理解和掌握，并且比较适用的方法。

参考文献：

[1] 王高雄，周之铭，朱思铭，等. 常微分方程[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2006.
Wang Gaoxiong，Zhou Zhiming，Zhu Siming，et al. Ordinary Differential Equations[M]. 3rd ed. Beijing：Higher Education Press，2006.

[2] 伍卓群，李　勇. 常微分方程[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
Wu Zhuoqun，Li Yong. Ordinary Differential Equations[M]. Beijing：Higher Education Press，2004.

[3] 佘智君. 二阶常系数非齐次线性微分方程通解的简易求解法[J]. 重庆工学院学报：自然科学版，2008，22(8)：85-86，111.
She Zhijun. A Simple Method to Solve General Integral of Order 2 Constant Coefficient Non-Homogeneous Linear Differential Equation[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology：Natural Science，2008，22(8)：85-86，111.

[4] 杨国梁，周　周，杨志勇，等. 二阶常系数非齐次线性微分方程特解的一种求法[J]. 内江师范学院学报，2009，24（增刊2）：249-250.
Yang Guoliang，Zhou Zhou，Yang Zhiyong，et al. The Unified Method for Particular Solution of 2 Order Constant Coefficient Homogeneous Linear Differential Equation[J]. Journal of Neijiang Normal University，2009，24(S2)：249-250.

[5] 邓云辉. 线性常系数非齐次微分方程的特解公式[J]. 数学的实践与认识，2009，39 (5)：198-200.
Deng Yunhui. A Formula for Finding Particular Solutions of Ordinary Differential Equation[J]. Mathematics in Practice and Theory，2009，39 (5)：198-200.

[6] 方有康. 求一类常系数线性常微分方程特解的有限递推法[J]. 数学的实践与认识，2009，39 (17)：246-250.
Fang Youkang. A Finite Recursive Method for Particular Solution of a Class of Linear ODE with Constant Coefficients [J]. Mathematics in Practice and Theory，2009，39 (17)：246-250.

（责任编辑：邓光辉）