用积分不等式计算一类定积分的值

李平乐

（娄底职业技术学院 机电工程系，湖南 娄底 417000）

摘　要：对一类定积分$\int_a^b \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$的近似计算进行了研究，给出了2个积分不等式。以此，可近似估算出积分的值，并能确定其误差的大小。通过将积分区间细分，可进一步提高估算值的精确度，这为计算机编程提供了数学模型。

关键词：积分不等式；估算；误差

中图分类号：O172.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)05-0037-05

Calculation of a Type of Definite Integration Value with Integral Inequalities

Li Pingle

（Department of Mechanical and Electrical Engineering，Loudi Vocational and Technical college，Loudi Hunan 417000，China）

Abstract: Studies the approximate computation of a definite integration $\int_a^b \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ and provides two new inequalities. This can approximately compute the value of integration and determine the integral error. By subdividing the integration interval, can improve the accuracy of computations further, and it provides mathematical models for computer programming.

Keywords: integral inequalities; computation; error

0　引言

计算定积分近似值的传统方法有：矩形法、梯形法、抛物线法等[1-2]。它们存在共同的缺点：不能判断其近似值是大于精确值还是小于精确值，也不能估算出近似值偏离精确值的程度。虽然有些不等式可用来估算定积分的值，但估算精度不高。

文献[3-10]对一些定积分的近似计算作了探讨，给出了一些较好的计算方法。在此基础上，本文给出一类定积分的2个不等式，并给出估算定积分的值的方法。当精度要求不高时，利用计算器手工计算即可；当精度要求较高时，可先将积分区间细分并建立计算的数学模型，再根据数学模型编程，利用计算机进行数值计算。这样，工程设计中一些很难计算的定积分，特别是被积函数的原函数不能用初等函数表示的定积分的近似计算，变得较容易；还可利用计算机的强大功能，将近似计算的精确度极大地提高。

1　主要结论

定理1　当$x\in[a,b](a>0)$，且x是第一、四象限的角时，函数$f(x)=\frac{\cos x}{x}$连续，$\frac{\cos x}{x}>0$，且下列积分不等式成立。

收稿日期：2010-07-08

通信作者：李平乐（1955-），男，湖南涟源人，娄底职业技术学院高级讲师，主要研究方向为积分近似计算及误差确定在工程设计中的应用，E-mail：xielichun188@163.com

$$\frac{(b-a)^2}{\sqrt{\left(b\tan b-a\tan a+\ln\left|\frac{\cos b}{\cos a}\right|\right)^2-\left(\frac{b}{\cos b}-\frac{a}{\cos a}+\ln\left|\frac{\sec a-\tan a}{\sec b-\tan b}\right|\right)^2}}<\int_a^b\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<$$

$$\sqrt{\frac{(b-a)^2}{ab}-\frac{(b-a)^4}{\left(a\cot a-b\cot b+\ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right|\right)^2-\left(\frac{a}{\sin a}-\frac{b}{\sin b}+\ln\left|\frac{\tan(b/2)}{\tan(a/2)}\right|\right)^2}}。\tag{1}$$

证明 1）先证式（1）右半部分。

当x是第一象限的角时，有：

$$\int_a^b\frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x。\tag{2}$$

由文献[3]得：

$$\int_a^b\frac{x\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin^2 x}\mathrm{d}x<\sqrt{(b-a)\left(\int_a^b\frac{x^2}{\sin^4 x}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{x^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)},\tag{3}$$

将式（3）两边平方，并整理得：

$$\left(\int_a^b\frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)^2\Big/(b-a)<\int_a^b\frac{x^2}{\sin^4 x}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{x^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x。\tag{4}$$

由文献[4]得：

$$\int_a^b\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x<\sqrt{(b-a)\int_a^b\frac{x^2}{\sin^4 x}\mathrm{d}x},\tag{5}$$

将式（5）两边平方，并整理得：

$$\int_a^b\frac{x^2}{\sin^4 x}\mathrm{d}x>\left(\int_a^b\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)^2\Big/(b-a),\tag{6}$$

将式（6）代入式（4），并整理得：

$$\int_a^b\frac{x^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x<\left[\left(\int_a^b\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b\frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)^2\right]\Big/(b-a)。\tag{7}$$

由文献[5]得：

$$\int_a^b\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x>(b-a)^2\Big/\int_a^b\frac{x^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x。\tag{8}$$

通过求定积分，得：

$$\int_a^b\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=a\cot a-b\cot b-\ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right|,\tag{9}$$

$$\int_a^b\frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{a}{\sin a}-\frac{b}{\sin b}+\ln\left|\frac{\tan(b/2)}{\tan(a/2)}\right|,\tag{10}$$

$$\int_a^b\frac{\cos^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{b-a}{ab}-\int_a^b\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x。\tag{11}$$

由文献[6]得：

$$\int_a^b\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<\sqrt{(b-a)\int_a^b\frac{\cos^2 x}{x^2}\mathrm{d}x}。\tag{12}$$

综合式（8）~（12）整理得：

$$\int_a^b\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<\sqrt{\frac{(b-a)^2}{ab}-\frac{(b-a)^4}{\left(a\cot a-b\cot b+\ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right|\right)^2-\left(\frac{a}{\sin a}-\frac{b}{\sin b}+\ln\left|\frac{\tan(b/2)}{\tan(a/2)}\right|\right)^2}}。$$

当x是第四象限的角时，证法与是第一象限的角类似。式（1）右端证毕。

2）再证式（1）左半部分。

当x是第一象限的角时，有：

$$\int_a^b\frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x。\tag{13}$$

由文献[3]得：

$$\int_a^b\frac{x\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x<\sqrt{(b-a)\left(\int_a^b\frac{x^2}{\cos^4 x}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{x^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)},\tag{14}$$

将式（14）两边平方，并整理得：

$$\left(\int_a^b\frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)^2\Big/(b-a)<\int_a^b\frac{x^2}{\cos^4 x}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{x^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x。\tag{15}$$

由文献[4]得：

$$\int_a^b\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x<\sqrt{(b-a)\int_a^b\frac{x^2}{\cos^4 x}\mathrm{d}x},\tag{16}$$

将式（16）两边平方，并整理得：

$$\int_a^b\frac{x^2}{\cos^4 x}\mathrm{d}x>\left(\int_a^b\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)^2\Big/(b-a),\tag{17}$$

将式（17）代入式（15），并整理得：

$$\int_a^b \frac{x^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x <$$

$$\left[\left(\int_a^b \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)^2\right]\Big/(b-a)。\tag{18}$$

由文献[5]得：

$$\int_a^b \frac{\cos^2 x}{x^2}\mathrm{d}x > (b-a)^2\Big/\int_a^b \frac{x^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x,\tag{19}$$

通过求积分，得：

$$\int_a^b \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = b\tan b - a\tan a - \ln\left|\frac{\cos b}{\cos a}\right|,\tag{20}$$

$$\int_a^b \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{b}{\cos b}-\frac{a}{\cos a}+\ln\left|\frac{\sec a+\tan a}{\sec b+\tan b}\right|。\tag{21}$$

由文献[6]得：

$$\int_a^b \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x < \sqrt{(b-a)\int_a^b \frac{\cos^2 x}{x^2}\mathrm{d}x}。\tag{22}$$

综合式（19）～（22）整理得：

$$\frac{(b-a)^2}{\sqrt{\left(b\tan b-a\tan a+\ln\left|\frac{\cos b}{\cos a}\right|\right)^2-\left(\frac{b}{\cos b}-\frac{a}{\cos a}+\ln\left|\frac{\sec a\ \ \tan a}{\sec b-\tan b}\right|\right)^2}} < \int_a^b \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x。$$

当x是第四象限的角时，证法与是第一象限的角类似。式（1）左端证毕。

定理2　当$x\in[a,b](a>0)$，且x是第二、三象限的角时，函数$f(x)=\frac{\cos x}{x}$连续，$\frac{\cos x}{x}<0$，且下列积分不等式成立。

$$-\sqrt{\frac{(b-a)^2}{ab}-\frac{(b-a)^4}{\left(a\cot a-b\cot b+\ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right|\right)^2-\left(\frac{a}{\sin a}-\frac{b}{\sin b}+\ln\left|\frac{\tan(b/2)}{\tan(a/2)}\right|\right)^2}} < \int_a^b \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x <$$

$$-\frac{(b-a)^2}{\sqrt{\left(b\tan b-a\tan a+\ln\left|\frac{\cos b}{\cos a}\right|\right)^2-\left(\frac{b}{\cos b}-\frac{a}{\cos a}+\ln\left|\frac{\sec a+\tan a}{\sec b+\tan b}\right|\right)^2}}。\tag{23}$$

因为，x是第二象限的角与x是第一象限的角时，$|\cos x/x|$的变化规律相同；x是第三象限的角与x是第一象限的角时，$|\cos x/x|$的变化规律相同；所以，由式（1）可得式（23）成立。

2　计算实例

例1　估算定积分$\int_{\frac{13\pi}{8}}^{\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$的值。

解法1　利用定积分的性质进行估算。

因为$\frac{\cos x}{x}$在积分区间$\left[\frac{13\pi}{8},\frac{15\pi}{8}\right]$上单调递增，由

$$\frac{\cos\frac{13\pi}{8}}{\frac{13\pi}{8}}\left(\frac{15\pi}{8}-\frac{13\pi}{8}\right)<\int_{\frac{13\pi}{8}}^{\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\cos\frac{15\pi}{8}}{\frac{15\pi}{8}}\left(\frac{15\pi}{8}\ \ \frac{13\pi}{8}\right)，$$

得：

$$0.058\,874\,419<\int_{\frac{13\pi}{8}}^{\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<0.123\,183\,937。$$

估算误差：

$$0.123\,183\,937-0.058\,874\,419=0.064\,309\,518。\tag{24}$$

解法2　利用定理1中的不等式进行估算。

由

$$\frac{\left(\frac{15\pi}{8}-\frac{13\pi}{8}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{15\pi}{8}\tan\frac{15\pi}{8}-\frac{13\pi}{8}\tan\frac{13\pi}{8}+\ln\left|\frac{\cos\frac{15\pi}{8}}{\cos\frac{13\pi}{8}}\right|\right)^2-\left(\frac{\frac{15\pi}{8}}{\cos\frac{15\pi}{8}}-\frac{\frac{13\pi}{8}}{\cos\frac{13\pi}{8}}+\ln\left|\frac{\sec\frac{13\pi}{8}+\tan\frac{13\pi}{8}}{\sec\frac{15\pi}{8}+\tan\frac{15\pi}{8}}\right|\right)^2}}<\int_{\frac{13\pi}{8}}^{\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<$$

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{15\pi}{8}-\frac{13\pi}{8}\right)^2}{\frac{15\pi}{8}\cdot\frac{13\pi}{8}}-\frac{\left(\frac{15\pi}{8}-\frac{13\pi}{8}\right)^4}{\left(\frac{13\pi}{8}\cot\frac{13\pi}{8}-\frac{15\pi}{8}\cot\frac{15\pi}{8}+\ln\left|\frac{\sin\frac{15\pi}{8}}{\sin\frac{13\pi}{8}}\right|\right)^2-\left(\frac{\frac{13\pi}{8}}{\sin\frac{13\pi}{8}}-\frac{\frac{15\pi}{8}}{\sin\frac{15\pi}{8}}+\ln\left|\frac{\tan\frac{15\pi}{16}}{\tan\frac{13\pi}{16}}\right|\right)^2}}\text{，得：}$$

$$0.088\,065\,027<\int_{\frac{13\pi}{8}}^{\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<0.114\,300\,516。$$

估算误差：

$0.114\,300\,516-0.088\,065\,027=0.026\,235\,489$。（25）

若将积分区间$\left[\frac{13\pi}{8},\frac{15\pi}{8}\right]$等分成2个区间$[a_1,b_1]$和$[a_2,b_2]$，其中：$a_1=\frac{13\pi}{8},b_1=\frac{14\pi}{8}$；$a_2=\frac{14\pi}{8},b_2=\frac{15\pi}{8}$。

由定理1得：

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{a_i}^{b_i}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<0.043\,306\,045+0.062\,383\,273=0.105\,689\,318,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{a_i}^{b_i}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x>0.038\,927\,008+0.056\,190\,319=0.095\,117\,327,$$

因此，

$$0.095\,117\,327<\int_{\frac{13\pi}{8}}^{\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<0.105\,689\,318。\qquad(26)$$

估算误差：

$0.105\,689\,318-0.095\,117\,327=0.010\,571\,991$。（27）

由式（26）和定积分的性质，得：

$$-0.105\,689\,318<\int_{\frac{15\pi}{8}}^{-\frac{15\pi}{8}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<-0.095\,117\,327。$$

例2 估算定积分$\int_{\frac{17\pi}{15}}^{\frac{23\pi}{15}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$的值。

解法1 利用定积分的性质进行估算。

因为$\frac{\cos x}{x}$在积分区间$\left[\frac{17\pi}{16},\frac{23\pi}{16}\right]$上单调递增，

由$\frac{\cos\frac{17\pi}{16}}{\frac{17\pi}{16}}\left(\frac{23\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\right)<\int_{\frac{17\pi}{16}}^{\frac{23\pi}{16}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<\frac{\cos\frac{23\pi}{16}}{\frac{23\pi}{16}}\left(\frac{23\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\right)$，得：

$$-0.346\,159\,100<\int_{\frac{17\pi}{16}}^{\frac{23\pi}{16}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<-0.050\,893\,127。$$

估算误差：

$-0.050\,893\,127-(-0.346\,159\,100)=0.295\,266\,373$。（28）

解法2 利用定理2中的不等式进行估算。

由
$$-\sqrt{\frac{\left(\frac{23\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\right)^2}{\frac{23\pi}{16}\cdot\frac{17\pi}{16}}-\frac{\left(\frac{23\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\right)^4}{\left(\frac{17\pi}{16}\cot\frac{17\pi}{16}-\frac{23\pi}{16}\cot\frac{23\pi}{16}+\ln\left|\frac{\sin\frac{23\pi}{16}}{\sin\frac{17\pi}{16}}\right|\right)^2-\left(\frac{\frac{17\pi}{16}}{\sin\frac{17\pi}{16}}-\frac{\frac{23\pi}{16}}{\sin\frac{23\pi}{16}}+\ln\left|\frac{\tan\frac{23\pi}{32}}{\tan\frac{17\pi}{32}}\right|\right)^2}}<$$

$$\int_{\frac{17\pi}{16}}^{\frac{23\pi}{16}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<-\frac{\left(\frac{23\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{23\pi}{16}\tan\frac{23\pi}{16}-\frac{17\pi}{16}\tan\frac{17\pi}{16}+\ln\left|\frac{\cos\frac{23\pi}{16}}{\cos\frac{17\pi}{16}}\right|\right)^2-\left(\frac{\frac{23\pi}{16}}{\cos\frac{23\pi}{16}}-\frac{\frac{17\pi}{16}}{\cos\frac{17\pi}{16}}+\ln\left|\frac{\sec\frac{17\pi}{16}+\tan\frac{17\pi}{16}}{\sec\frac{23\pi}{16}+\tan\frac{23\pi}{16}}\right|\right)^2}}\text{得：}$$

$$-0.266\,820\,625<\int_{\frac{17\pi}{16}}^{\frac{23\pi}{16}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<-0.042\,522\,429。$$

估算误差：

$-0.042\,522\,429-(-0.266\,820\,625)=0.224\,298\,196$。（29）

若将积分区间$\left[\frac{17\pi}{16},\frac{23\pi}{16}\right]$等分成2个区间$[a_1,b_1]$和$[a_2,b_2]$，其中：$a_1=\frac{17\pi}{16}$，$b_1=\frac{20\pi}{16}$；$a_2=\frac{20\pi}{16},b_2=\frac{23\pi}{16}$。

由定理2得：

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{a_i}^{b_i}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<-0.136\,425\,921-0.051\,858\,104=-0.188\,284\,025,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{a_i}^{b_i}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x > -0.150\,364\,660-0.074\,557\,793=-0.224\,922\,453,$$

因此，

$$-0.224\,922\,453<\int_{\frac{17\pi}{16}}^{\frac{23\pi}{16}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<-0.188\,284\,025。\qquad（30）$$

估算误差：

$$-0.188\,284\,025-(-0.224\,922\,453)=0.036\,638\,428。\qquad（31）$$

由式（30）和定积分的性质，得：

$$0.188\,284\,025<\int_{\frac{15\pi}{16}}^{\frac{17\pi}{16}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x<0.224\,922\,453。$$

3　结语

定理 1、定理 2 的 2 个不等式，给出了计算定积分 $\int_a^b\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值，以及对近似值作误差估计的方法。比较例 1 中的式（24），（25），（27）和例 2 中的式（28），（29），（31）可知，用本文给出的方法计算的近似值，比用定积分性质计算的近似值精确；还可通过将积分区间细分，多次利用本文的方法，使计算的值进一步精确。

参考文献：

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，1988.
Teaching and Research Section of Mathematics of Tongji University. Higher Mathematics[M]. 3rd ed. Beijing：Higher Education Press, 1988.

[2] 丁鹤龄. 高等数学[M]，北京：高等教育出版社，1982.
Ding Heling. Higher Mathematics[M]. Beijing：Higher Education Press, 1982

[3] 李平乐. 关于一类积分的近似计算及误差确定的第三种论证方法[J]. 西北师范大学学报：自然科学版：科研与教学论文专辑，2008(41)：5−19.
Li Pingle. The Third Method for Demonstrating Approximate Computation and Error Estimation of a Type Integration[J]. Journal of Northwest Normal University： Natural Sciences Edition：Thesis Collection of Research and Teaching，2008 (41)：5−19.

[4] 李平乐. 关于一类积分的近似计算及误差确定的第三种论证方法在工程设计中的应用之一[J]. 沈阳工程学院学报：自然科学版，2009，5(2)：187−189.
Li Pingle. One of the Applications of the Third Method for Demonstrating Approximate Computation and Error Estimation About a Type of Integration in Engineering Design [J]. Journal of Shenyang Institute of Engineering：Natural Science，2009，5(2)：187−189.

[5] 李平乐. 基于积分近似计算在工程设计领域的研究[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2008，29(6)：4−6.
Li Pingle. Study of Region of Engineering Design Based on Approximate Computation of Integration[J]. Journal of Jishou University：Natural Sciences Edition，2008，29(6)：4−6.

[6] 李平乐. 新的积分近似计算方法在工程设计中的应用之一[J]. 太原师范学院学报：自然科学版，2008，7(3)：37−39.
Li Pingle. One of the Uses for a New Method of Demonstrating Approximate Computation of Integration in Engineering Design [J]. Journal of Taiyuan Normal University：Natural Sciences Edition. 2008，7(3)：37−39.

[7] 李平乐. 基于积分近似计算在工程设计领域的研究[J]. 西北师范大学学报：自然科学版：科研与教学论文专辑，2008(42)：8−11.
Li Pingle. Study of Region of Engineering Design Based on Approximate Computation of Integration[J]. Journal of Northwest Normal University： Natural Sciences Edition：Thesis Collection of Research and Teaching，2008(42)：8−11.

[8] 李平乐. 基于工程设计计算的新的积分不等式与数学模型的研究[J]. 太原师范学院学报：自然科学版，2009，8(3)：32−35.
Li Pingle. Mathematical Models Research for New Integral Inequalities Based on Engineering Design Computation [J]. Journal of Taiyuan Normal University：Natural Science，2009，8(3)：32−35.

[9] 李平乐. 工程设计计算方法的精度分析[J]. 沈阳工程学院学报：自然科学版，2010，6(1)：94−96.
Li Pingle. Accuracy Analysis of Calculation Method for Engineering Design[J]. Journal of Shenyang Institute of Engineering：Natural Science，2010，6(1)：94−96.

[10] 李平乐. 定积分换元与新的积分不等式结合在工程设计计算中的应用[J]. 焦作大学学报，2010(1)：114−115.
Li Pingle. Application of the Combination of Converting Elements of Definite Integration and New Inequalities in Engineering Design Computation[J]. Journal of Jiaozuo University，2010(1)：114−115.

（责任编辑：邓光辉）