第24卷第5期　　　　　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　　　　　Vol.24 No.5
2010年9月　　　　　Journal of Hunan University of Technology　　　　　Sep. 2010

离散时滞Mackey-Glass系统的稳定性与分岔

侯爱玉，彭震春

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：利用中心流形定理和正规型理论讨论了离散时滞Mackey-Glass系统的动力学性质，分析了其正平衡点的稳定性，并讨论了当参数经过一系列临界值时Neimark-Sacker分岔的稳定性与方向。通过数值模拟验证了所得结果的正确性。

关键词：离散时滞Mackey-Glass系统；稳定性；Neimark-Sacker分岔

中图分类号：O151　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2010)05-0023-05

The Stability and Bifurcation of Discrete Delay Mackey-Glass System

Hou Aiyu，Peng Zhenchun

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A discrete delay Mackey-Glass system is considered via center manifold theorem and norm form theory，the local stability of positive equilibrium is analyzed, and the stability and direction of Neimark-Sacker bifurcation of the system is also discussed. Finally, numerical simulations is provided to verify the analytical results.

Keywords：discrete delay Mackey-Glass system；stability；Neimark-Sacker bifurcation

分岔现象出现在较多依赖参数的非线性动力系统中。当参数变化时，解的定性结构将发生变化。将平衡点与周期解联系在一起的这种分岔对于连续动力系统称之为Hopf分岔，对于离散动力系统出现的不变的闭曲线称之Neimark-Sacker分岔。关于常微分方程或时滞微分方程的Hopf分岔的讨论，已有一些结果，见文献[1-2]。考虑时滞Mackey-Glass系统[3]

$$p'(t)=-\gamma p(t)+\frac{\beta v^{\theta}p(t-\tau)}{v^{\theta}+p^{\theta}(t-\tau)}\,,\qquad (1)$$

系统（1）表示一个生理控制系统。其中，$p(t)$表示血液循环中成熟细胞的质量分数，τ是在骨髓中产生未成熟细胞和在血流中释放成熟细胞的时滞参数，β, v, θ, γ都是正常数。

通过变换$p(t)=vx(t)$，系统（1）化为：

$$x'(t)=-\gamma x(t)+\frac{\beta x(t-\tau)}{1+x^{\theta}(t-\tau)}\,,\ \beta>\gamma>0, \theta>0, \tau>0。\qquad (2)$$

本文通过Trapezoidal[4]方法离散化系统（2），分析离散化以后的系统的平衡点的稳定性和Neimark-Sacker分岔的存在性，利用中心流形定理和规范形理论讨论Neimark-Sacker分岔的方向和分岔的稳定性。

1　平衡点的稳定性分析

假设$u(t)=x(t\tau)$，则方程（2）可以改写为：

$$u'(t)=-\tau\gamma u(t)+\frac{\tau\beta u(t-1)}{1+u^{\theta}(t-1)}\,,\qquad (3)$$

考虑步长$h=\frac{1}{m}$，其中$m\in Z^{+}$。对方程（3）利用Trapezoidal方法，得到以下时滞差分方程：

$u_{n+1}=u_n+$

收稿日期：2009-10-26

通信作者：侯爱玉（1978-），女，湖南安仁人，湖南工业大学讲师，中南大学硕士研究生，主要研究方向为非线性动力系统的稳定性与分岔，E-mail：aiyu78@126.com

$$\frac{h}{2}\left[\left(-\tau\gamma u_n+\frac{\tau\beta u_{n-m}}{1+u^{\theta}_{n-m}}\right)+\left(-\tau\gamma u_{n+1}+\frac{\tau\beta u_{n-m+1}}{1+u^{\theta}_{n-m+1}}\right)\right]，即$$

$$u_{n+1}=\frac{2-\tau\gamma h}{2+\tau\gamma h}u_n+\frac{\tau\beta h}{2+\tau\gamma h}\left(\frac{u_{n-m}}{1+u^{\theta}_{n-m}}+\frac{u_{n-m+1}}{1+u^{\theta}_{n-m+1}}\right), \quad (4)$$

其中 u_n 为 $u(nh)$ 的近似值。如果给出 $m+1$ 个实数 $a_{k_0-m},a_{k_0-m+1},\cdots,a_{k_0}$，则方程（4）有唯一的解序列 $\{u_n\}_{n=k_0-m}^{\infty}$ 满足初始条件 $u_n=a_n$，其中 $n\in[k_0-m,k_0]\cap\mathbf{Z}$。

假设 u^* 为方程（4）的一个正平衡点，则有 $u^*=\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta}}$。设 $y_n=u_n-u^*$，则有

$$y_{n+1}=\frac{2-\tau\gamma h}{2+\tau\gamma h}(y_n+u^*)+$$

$$\frac{\tau\beta h}{2+\tau\gamma h}\left(\frac{y_{n-m}+u^*}{1+(y_{n-m}+u^*)^{\theta}}+\frac{y_{n-m+1}+u^*}{1+(y_{n-m+1}+u^*)^{\theta}}\right)-u^*, \quad (5)$$

引入新的变量 $Y_n=(y_n,y_{n-1},\cdots,y_{n-m})^{\mathrm{T}}$，并将式（5）写成以下形式：

$$Y_{n+1}=F(Y_n,\tau), \quad (6)$$

其中 $F=(F_0,F_1,\cdots,F_m)^{\mathrm{T}}$，显然，原点是式（6）的不动点，且式（6）的线性部分为：

$$Y_{n+1}=AY_n, \quad (7)$$

其中 $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

且 $a_1=\frac{2-\tau\gamma h}{2+\tau\gamma h}$，$a_2=a_3=\frac{\tau\gamma h}{\beta(2+\tau\gamma h)}\left[\beta-\theta(\beta-\gamma)\right]$。矩阵 A 的特征方程为：

$$\lambda^{m+1}-a_1\lambda^m-a_2\lambda-a_3=0。 \quad (8)$$

显然，方程（6）的零解的稳定性依赖于方程（8）的根的分布。

引理1[5] 假设 $B\in\mathbf{R}$ 是一个有界的、连通的闭集，多项式

$$f(\lambda,\tau)=\lambda^m+p_1(\tau)\lambda^{m-1}+\cdots+p_m(\tau)$$

关于 $(\lambda,\tau)\in(\mathbf{C}\times B)$ 连续，参数 $\tau\in B$，则当 τ 变化时，$f(\lambda,\tau)$ 在单位圆外部 $\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|>1\}$ 的零点的阶数的和，只有在有一个零点出现在单位圆或越过单位圆时才发生变化。

引理2 存在 $\bar{\tau}>0$ 使得当 $0<\tau<\bar{\tau}$ 时，方程（8）所有根的模都小于1。

证明 当 $\tau=0$ 时，方程（8）变成 $\lambda^{m+1}-\lambda^m=0$。此方程在 $\tau=0$ 处有一个 m 重根 $\lambda=0$ 和一个单根 $\lambda=1$。

考虑满足 $|\lambda(0)|=1$ 的根 $\lambda(\tau)$。此根连续依赖于 τ 且为 τ 的可微函数，由式（8）有

$$\left.\frac{\mathrm{d}|\lambda|^2}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0,\lambda=1}=\left[\lambda\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}}{\mathrm{d}\tau}+\bar{\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right]_{\tau=0,\lambda=1}=$$

$$-\frac{2h\gamma\theta(\beta-\gamma)}{\beta}<0，$$

从而对于所有足够小的 $\tau>0$ 有 $|\lambda(\tau)|<1$，所以对于足够小的正数 τ，方程（8）的所有的根都位于 $|z|<1$ 内，从而存在最大值 $\bar{\tau}$。

当特征方程（8）有2个特征根穿过单位圆的时候，方程（6）出现Neimark-Sacker分岔。因此，需要找出根在单位圆上所对应的 τ。此时，设在单位圆上的根为 $\lambda=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$，$\omega\in(-\pi,\pi]$。因为实系数多项式的复根成对出现，只需考虑 $\omega\in(0,\pi]$。$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}(\omega\in(0,\pi])$ 是式（8）的根当且仅当 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$ 满足

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\omega}-a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}-a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-a_3=0， \quad (9)$$

由式（9）可得：

$$\tau=\frac{-2\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-1)}{\gamma h(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+1)\left[\beta(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega}-1)+\theta(\beta-\gamma)\right]},\ \omega\in(0,\pi]， \quad (10)$$

因为 ±1 不是方程（8）的根，且 τ 是实数，所以得到关于 $\omega\in(0,\pi]$ 和 τ 的表达式：

$$\cos m\omega=\frac{\beta}{\beta-\theta(\beta-\gamma)}， \quad (11)$$

$$\tau=\frac{2\beta\left[\beta-\theta(\beta-\gamma)\right]\tan\frac{\omega}{2}\sin m\omega}{\gamma h\left\{\left[\beta-\theta(\beta-\gamma)\right]^2-\beta^2\right\}}， \quad (12)$$

若 $\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}<\gamma<\frac{\beta(\theta-1)}{\theta}$，则有 $\cos\omega<-1$，矛盾。所以有下面的结论。

引理3 假设步长 h 足够小。若 $\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}<\gamma<\frac{\beta(\theta-1)}{\theta}$，则对于所有 $\tau>0$ 方程（8）没有模为1的根。

证明 由引理3可知，若 $\gamma<\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}$，因为 $\cos m\omega<0$，且 τ 是正实数，由式（11）和（12）可得：

$$\tau=\frac{2\beta\tan\frac{\omega}{2}}{\gamma h\sqrt{\left[\beta-\theta(\beta-\gamma)\right]^2-\beta^2}}。 \quad (13)$$

$$令\ \omega_j=\frac{1}{m}\left\{\arccos\left(\frac{\beta}{\beta-\theta(\beta-\gamma)}\right)+2j\pi\right\}，$$

$$j=0,1,2,\cdots,\left[\frac{m+1}{2}\right]， \quad (14)$$

$$\tau_j=\frac{2\beta\tan\frac{\omega_j}{2}}{\gamma h\sqrt{\left[\beta-\theta(\beta-\gamma)\right]^2-\beta^2}},\ j=0,1,2,\cdots,\left[\frac{m+1}{2}\right]。\qquad(15)$$

其中$[\cdot]$为取最大整数函数。设$\lambda_j(\tau)=r_j(\tau)e^{i\omega_j(\tau)}$是方程（8）在$\tau=\tau_j$附近满足$r_j(\tau_j)=1,\omega_j(\tau_j)=\omega_j$的根。

引理4 假设步长h足够小且$\gamma<\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}$，则$d_h=\left.\frac{\mathrm{d}|\lambda|^2}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau_j,\omega=\omega_j}>0$，其中$\tau_j$和$\omega_j$满足方程（14）和（15）。

证明 由方程（8）可得

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{\tau(2+\tau h\gamma)}\frac{\lambda^m(\lambda-1)}{(m+1)\lambda^m-m\lambda^{m-1}a_1-a_2}，且$$

$$d_h=\left.\frac{\mathrm{d}|\lambda|^2}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau_j,\omega=\omega_j}=\left[\lambda\frac{\mathrm{d}\bar\lambda}{\mathrm{d}\tau}+\bar\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right]_{\tau=\tau_j,\omega=\omega_j}=$$

$$\frac{4}{\tau_j(2-\tau\gamma h)}\cdot\frac{(m+1+ma_1-a_2\cos m\omega_j)(1-\cos\omega_j)-a_2\sin m\omega_j\sin\omega_j}{\xi^2+\eta^2},$$

式中：$\xi=(m+1)\cos m\omega_j-ma_1\cos(m-1)\omega_j-a_2$；

$\eta=(m+1)\sin m\omega_j-ma_1\sin(m-1)\omega_j$。

由式(11),(12)和$\gamma<\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}$可知，$\cos m\omega_j<0$，$\sin m\omega_j>0$，$a_2<0$，$a_1>0$（由于$h>0$足够小）。因此，$d_h>0$。

由引理1~4，可得引理5。

引理5

1）若$\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}<\gamma<\frac{\beta(\theta-1)}{\theta}$，则对于所有$\tau>0$，方程（8）的所有根的模小于1；

2）若$\gamma<\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}$，则当$\tau=\tau_j\left(j=0,1,2,\cdots,\left[\frac{m-1}{2}\right]\right)$时，方程（8）在单位圆上有一对单根$e^{\pm i\omega_j}$。进一步，当$\tau\in(0,\tau_0)$时，方程（8）的所有根的模小于1；当$\tau=\tau_0$时，方程（8）的根除了$e^{\pm i\omega_0}$外，其它所有根的模小于1；当$\tau\in(\tau_k,\tau_{k+1})$时，方程（8）有$2(k+1)$个根的模大于1。

证明 1）假设$\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}<\gamma<\frac{\beta(\theta-1)}{\theta}$，由引理2和引理3可知，对所有$\tau>0$，方程（8）没有模为1的根。由引理1，对所有$\tau>0$方程（8）的所有根的模小于1。因此，引理5的结论1）成立；

2）若$\gamma<\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}$，由引理4，当$\tau\in(0,\tau_0)$时，方程（8）的所有根的模小于1。而当$\tau=\tau_0$时，方程（8）的根除了$e^{\pm i\omega_0}$外，其它所有根的模小于1；进一步，由Rouché定理，当$\tau\in(\tau_k,\tau_{k+1})$时，方程（8）有$2(k+1)$个根的模大于1。因此，引理5的结论2）成立。

由引理2~5，可得定理1。

定理1 1）若$\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}<\gamma<\frac{\beta(\theta-1)}{\theta}$，则对于所有$\tau>0$，方程（4）的平衡点$u=u^*$渐近稳定；

2）若$\gamma<\frac{\beta(\theta-2)}{\theta}$，当$\tau\in(0,\tau_0)$时，方程（4）的平衡点$u=u^*$渐近稳定；当$\tau>\tau_0$时，方程（4）的平衡点$u=u^*$不稳定；当$\tau=\tau_j$时，方程（4）在$u=u^*$处产生Neimark-Sacker分岔，其中$\tau=\tau_j$满足式（15）。

2 Neimark-Sacker分岔的方向和稳定性

本节利用中心流形定理和规范形理论讨论Neimark-Sacker分岔的方向和分岔的稳定性。

不失一般性，记τ^*为临界值，且在$(0,0,\cdots,0)$处方程（6）出现Neimark-Sacker分岔。

对于映射（6），有

$$Y_{n+1}=AY_n+\frac{1}{2}B(Y_n,Y_n)+\frac{1}{6}C(Y_n,Y_n,Y_n)+O(\|Y_n\|^4),$$

式中：$B(Y_n,Y_n)=(B_0(Y_n,Y_n),0,\cdots,0)^T$；

$C(Y_n,Y_n,Y_n)=(C_0(Y_n,Y_n,Y_n),0,\cdots,0)^T$；

且$B_0(\phi_m,\varphi_m)=\frac{2\tau\theta h}{2+\tau\gamma h}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2\left(\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\cdot$

$[\theta(\beta-2\gamma)-\beta](\phi_{m-1}\varphi_{m-1}+\phi_m\varphi_m)$；

$C_0(\phi_m,\varphi_m,\eta_m)=\frac{\tau h\theta\gamma^4}{(2-\tau\gamma h)\beta^3}\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)^{\frac{\theta-2}{\theta}}\cdot$

$\left\{2\theta\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)^{\theta}\left[(2\theta-1)-(1+\theta)\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)^{\theta}\right]-\right.$

$\left.\frac{\gamma(1+\theta)}{\beta}\left[(\theta-1)-(\theta+1)\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)\right]\right\}\cdot$

$(\phi_{m-1}\varphi_{m-1}\eta_{m-1}+\phi_m\varphi_m\eta_m)$,

假设$q\in\mathbb{C}^{m+1}$是对应于$e^{i\omega^*}$的一个复的特征向量，$Aq=e^{i\omega^*}q$，$A\bar q=e^{-i\omega^*}\bar q$。还引进一个伴随特征向量$q^*\in\mathbb{C}^{m+1}$使得：

$$A^Tq^*=e^{-i\omega^*}q^*,\quad A^T\overline{q^*}=e^{i\omega^*}\overline{q^*},$$

且满足正规化条件$\langle q^*,q\rangle=1$，其中

$$\langle q^*,q\rangle=\sum_{j=0}^{m}\overline{q^*_j}q_j。$$

引理 6 假设$\boldsymbol{q}=(q_0,q_1,\cdots,q_m)^{\mathrm T}$为$\boldsymbol{A}$对应于$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}$的特征向量，且$\boldsymbol{q}^*=(q_0^*,q_1^*,\cdots,q_m^*)^{\mathrm T}$为$\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$对应于特征值$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}$的特征向量，则

$$q_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}q_{j+1},\ j=0,1,2,\cdots,m-1,\ \text{且}\ q_0=1,$$

$$\boldsymbol{q}^*=\overline{K}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)\omega^*}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}-a_1}\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)\omega^*}\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-2)\omega^*}\quad \cdots\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}\quad \frac{a_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega^*}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}-a_1}\right)^{\mathrm T},$$

其中$K=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega^*}}{m-1+\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}-a_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\omega^*}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}-a_1}}$。

证明 假设$\boldsymbol{q}=(q_0,q_1,\cdots,q_m)^{\mathrm T}$为$\boldsymbol{A}$对应于$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}$的一个特征向量，则有

$$\begin{cases}a_1q_0+a_2q_{m-1}+a_3q_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}q_0,\\ q_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}q_{j-1},\ j=0,1,2,\cdots,m-1\text{。}\end{cases}$$

令$q_0=1$，由上式可知$\boldsymbol{q}=\left(1,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*},\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega^*},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\omega^*}\right)^{\mathrm T}$为矩阵$\boldsymbol{A}$对应于$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}$的特征向量。类似的可得$\boldsymbol{q}^*$。

假设T^c表示对应于$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega^*}$的一个实的特征空间，它是由$\{\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}),\mathrm{Im}(\boldsymbol{q})\}$张成的一个二维空间，而$T^s$表示对应于$\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$除$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega^*}$之外所有特征值的$(m-1)$维实的特征空间。对于任意$x\in\mathbf{R}^{m+1}$有分解$x=zq+\bar z\bar q+y$，其中$z\in\mathbf{C},zq+\bar z\bar q\in\boldsymbol{T}^c,y\in\boldsymbol{T}^s$。复变量$z$可被认为是$T^c$上的一个新的坐标且

$$z=<q^*,x>,\quad y=x-<q^*,x>q+<\bar q^*,x>\bar q\text{。}$$

在此坐标上，映射在$\tau=\tau^*$处有以下形式：

$$\begin{cases}z\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}z+<\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{F}(z\boldsymbol{q}+\bar z\bar{\boldsymbol{q}}+y)>,\\ y\mapsto Ay+\boldsymbol{F}(z\boldsymbol{q}+\bar z\bar{\boldsymbol{q}}+y)-\\ <\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{F}(z\boldsymbol{q}+\bar z\bar{\boldsymbol{q}}+y)>\boldsymbol{q}-<\bar{\boldsymbol{q}}^*,\boldsymbol{F}(z\boldsymbol{q}+\bar z\bar{\boldsymbol{q}}+y)>\bar{\boldsymbol{q}}\text{。}\end{cases}\tag{16}$$

对式（16）进行泰勒展开，则有

$$\begin{cases}z\mapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}z+\dfrac12g_{20}z^2+g_{11}z\bar z+\dfrac12g_{02}\bar z^2+\\ \dfrac12G_{21}z^2\bar z+<G_{10},y>z+<G_{01},y>\bar z,\\ y\mapsto Ay+\dfrac12H_{20}z^2+H_{11}z\bar z+\dfrac12H_{02}\bar z^2+O(|z^3|)\text{。}\end{cases}\tag{17}$$

其中$g_{ij}\in\mathbf{C},G_{10},G_{01}\in\mathbf{C}^{m+1}$，且

$g_{20}=<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>,g_{11}=<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\bar{\boldsymbol{q}})>$，

$g_{02}=<\boldsymbol{q}^*,B(\bar{\boldsymbol{q}},\bar{\boldsymbol{q}})>,G_{21}=<\boldsymbol{q}^*,C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\bar{\boldsymbol{q}})>$，

$<G_{10},y>=<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},y)>$，

$<G_{01},y>=<\boldsymbol{q}^*,B(\bar{\boldsymbol{q}},y)>$，

$H_{20}=B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})-<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>\boldsymbol{q}-<\overline{\boldsymbol{q}^*},B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>\boldsymbol{q}$，

$H_{11}=B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})-<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>\boldsymbol{q}-<\overline{\boldsymbol{q}^*},B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>\boldsymbol{q}$，

$H_{02}=B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})-<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>\boldsymbol{q}-<\overline{\boldsymbol{q}^*},B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>\boldsymbol{q}$。

计算如下表达式的中心流形：

$$y=V(z,\bar z)=\frac12w_{20}z^2+w_{11}z\bar z+\frac12w_{02}\bar z^2+O(|z^3|),\tag{18}$$

其中$<\boldsymbol{q}^*,w_{ij}>=0$。将式（18）代入（17）中，则有

$$\begin{cases}w_{20}=\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega^*}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}H_{20},\\ w_{11}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}H_{11},\\ w_{02}=\left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega^*}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}H_{02}\text{。}\end{cases}$$

式（17）中的泰勒系数可用下列一组公式表示：

$g_{20}=<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})>,g_{11}=<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\bar{\boldsymbol{q}})>$，

$g_{02}=<\boldsymbol{q}^*,B(\bar{\boldsymbol{q}},\bar{\boldsymbol{q}})>$且

$$\begin{aligned}g_{21}=&<\boldsymbol{q}^*,C(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\bar{\boldsymbol{q}})>-\\ &2<\boldsymbol{q}^*,B\left(\boldsymbol{q},(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}B(\boldsymbol{q},\bar{\boldsymbol{q}})\right)>+\\ &<\boldsymbol{q}^*,B\left(\bar{\boldsymbol{q}},\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega^*}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})\right)>+\\ &\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}\left(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}\right)}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}}<\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})><\boldsymbol{q}^*,B(\boldsymbol{q},\bar{\boldsymbol{q}})>\\ &\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}}\left|<\boldsymbol{q}^*,B(\bar{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{q})>\right|^2-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}}{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega^*}-1}\left|<\boldsymbol{q}^*,B(\bar{\boldsymbol{q}},\bar{\boldsymbol{q}})>\right|^2\text{。}\end{aligned}$$

令$c_1(\tau)=$

$$\frac{g_{20}g_{11}(2z+\bar z-3)}{2(\bar z-1)(z^2-z)}+\frac{|g_{11}|^2}{1-\bar z}+\frac{|g_{02}|^2}{2(z^2-\bar z)}+\frac{g_{21}}{2},\tag{19}$$

将$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^*}$代入式（19），可得出$c_1(\tau^*)$。

由以上分析和讨论，有以下结果：

定理 2 方程（4）的Neimark-Sacker分岔的方向和稳定性由$\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}c_1(\tau^*)\right]$的符号所决定：

若$\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^*}c_1(\tau^*)\right]<0(>0)$，则Neimark-Sacker分岔是超临界的（次临界的），且分岔的不变的闭曲线为轨道稳定（不稳定）。

3 数值模拟

为了说明分系统的分析结果，考虑方程（4）以下的特殊情况：

假设m=20, β=0.6, θ=4, γ=0.2，则τ_0=8.312 1为Neimark-Sacker 分岔值。

在图 1 中，取初始值为u_n=3，n=1,2,⋯,21，当τ=7.5<8.312 1时，方程（4）的平衡点$u^*=2^{\frac14}\approx1.189$是渐近稳定的。图2中初始值取$u_n$=2.26($n$=1,2,⋯,21)，当$\tau$=9>$\tau_0$=8.312 1时，平衡点失去稳定性出现唯一的稳定的不变的闭曲线。

（下转第 63 页）