不确定线性采样系统鲁棒稳定性

王　炜[1,2]，曾红兵[1]

（1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412008；2. 湖南工贸技师学院，湖南 株洲 412000）

摘　要：通过将采样控制系统变换为具有分段连续时滞的连续时间模型，利用Lyapunov-Krasovskii泛函方法，讨论了采样控制系统的鲁棒稳定性问题，获得了系统基于线性矩阵不等式（LMI）的鲁棒稳定性条件，同时给出了控制器的设计方法。最后，通过数值示例验证了本文方法的有效性。

关键词：采样控制系统；Lyapunov-Krasovskii泛函；线性矩阵不等式；鲁棒稳定性

中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)04-0079-03

Robust Stability of Uncertain Linear Sampling Systems

Wang Wei[1,2]，Zeng Hongbing[1]

（1. College of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China；
2. Hunan Technician College of Industry and Commerce, Zhuzhou Hunan 412000, China）

Abstract: Discusses the robust stability of sampling control systems by transmitting the systems to a continuous-time model with piecewise continuous delay and by means of Lyapunov-Krasovskii functional method. Derives the robust stabilization conditions based on linear matrix inequality and presents a design method for the controller. Finally, a numerical example is given to verify the validity of this method.

Keywords: sampled-data systems; Lyapunov-Krasovskii functional; linear matrix inequality(LMI); robust stability

采样是数字控制系统中不可缺少的环节，近年来，采样控制系统的研究已引起广泛关注[1-2]。保证采样系统的稳定与镇定，目前常采用的主要方法有3种：其一是基于提升技术的方法[3-4]，但当采样时间及系统矩阵存在不确定性时，这种方法将不再有效。其二是基于混合离散/连续模型的方法[5]，Sivashankar等[6]利用这一方法获得了系统稳定的充分必要条件，但由于微分不等式组难于求解，因此，用这种方法获得稳定化的控制器非常困难；为克服这一问题，Hu等人[7]通过引入分段连续的Lyapunov函数，在等时间间隔采样条件下，重新讨论了系统的鲁棒稳定化问题，得到的条件基于一系列矩阵不等式，通过迭代算法，获得了稳定化的控制器。其三是基于线性连续时间系统的方法，张先明等[8]将控制输入表示为具有时变分段连续时滞的连续时间控制模型，讨论了系统的鲁棒稳定化，获得了基于LMI的稳定化充分条件，但形式复杂且要多次调整参数。本文沿用文献[8]的思想，但不引入任何自由矩阵，重新讨论采样控制系统的鲁棒稳定化问题，获得了形式更加简单的基于LMI的稳定化充分条件。该条件表明：对于采样控制系统，只要采样时间间隔不超出某一范围，获得的控制器均能镇定原系统。

1　问题描述

考虑系统：$\dot{x}(t)=\boldsymbol{A}x(t)+\boldsymbol{B}u(t)$，　　（1）

收稿日期：2010-04-06

通信作者：王　炜（1979-），女，天津人，湖南工贸技师学院讲师，湖南工业大学硕士研究生，主要研究方向为鲁棒控制和智能控制，E-mail：wangwei9804@163.com

式中：$x(t)\in\mathbf{R}^n$为系统状态；

$u(t)\in\mathbf{R}^m$为数字控制输入，具有如下形式：

$$u(t)=u_d(t_k)\quad(t_k\le t<t_{k+1}),\tag{2}$$

u_d为离散时间控制信号，$0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\cdots$为采样时刻。

数字控制输入式（2）可以表示成如下时滞控制输入形式：

$$u(t)=u_d(t_k)=u_d\big(t-(t-t_k)\big)=u_d\big(t-\tau(t)\big)\quad\big(t_k\le t<t_{k+1},\ \tau(t)=t-t_k\big),\tag{3}$$

显然，时变时滞$\tau(t)$为分段连续函数且满足：

$\tau(t)\le t_{k+1}-t_k,\ \dot\tau(t)=1,\ t\ne t_k$。

本文的主要目的是寻求状态反馈控制器

$$u(t)=Kx(t_k)\quad(t_k\le t<t_{k+1})\tag{4}$$

用于稳定化系统（1）。由式（3），控制器（4）可表示为$u(t)=Kx(t-\tau(t))$，代入系统（1）得到闭环系统为：

$$\dot x(t)=Ax(t)+BKx\big(t-\tau(t)\big)。\tag{5}$$

假设 1 $t_{k+1}-t_k\le h,\quad\forall k\ge0$。

在假设1下，有$\tau(t)\le h$，这样，系统（5）就可看成是具有不确定时滞但有界的线性时滞系统，如果控制器K能稳定化系统（5），则系统（1）的采样时间间隔只要求在有界范围$[0,h]$内，不要求等距离采样。

为讨论系统（5）的稳定性，需用到如下引理：

引理 1[9] 设$x(t)$为$\mathbf{R}^n$上具有连续一阶导数的向量函数，则对$\forall R=R^{\mathrm T}>0$和$\forall h\ge0$，满足不等式

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\mathrm ds\le\xi^{\mathrm T}(t)\begin{bmatrix}-R&R\\R&-R\end{bmatrix}\xi(t),\tag{6}$$

式中：$\xi^{\mathrm T}(t)=\big[x^{\mathrm T}(t)\quad x^{\mathrm T}\big(t-h(t)\big)\big]$。

引理 2[10] 给定适当维数矩阵$Q=Q^{\mathrm T},H,E$，则$Q+HF(t)E+E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)H^{\mathrm T}<0$对任意满足$F^{\mathrm T}(t)F(t)\le I$的$F(t)$成立的充要条件是：存在$\lambda>0$，使得

$Q+\lambda^{-1}H^{\mathrm T}H+\lambda E^{\mathrm T}<0$。

2 主要结果

据引理1建立闭环系统（5）渐近稳定的充分条件，给出控制器的设计方法，并将其推广到不确定系统。

定理 1 给定$h>0$，如果存在$P>0,R>0$，满足如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}PA+A^{\mathrm T}P-R&PBK+R&hA^{\mathrm T}R\\ *&-R&h(BK)^{\mathrm T}R\\ *&*&-R\end{bmatrix}<0,\tag{7}$$

则闭环系统（5）对$\forall\tau(t)\in[0,h]$均为渐近稳定。

证明 取Lyapunov-Krasovskii泛函

$$V(t)=x^{\mathrm T}(t)Px(t)+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)(hR)\dot x(s)\mathrm ds\mathrm d\theta,\tag{8}$$

则$V(t)$沿系统（5）的轨线的导数为：

$$\dot V(t)=2x^{\mathrm T}(t)P\dot x(t)+h^2\dot x^{\mathrm T}(t)R\dot x(t)-h\int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\mathrm ds,\tag{9}$$

因$\tau(t)\le h$，于是有：

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\mathrm ds\le-\tau(t)\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\mathrm ds,$$

对上式右边应用引理1，并代入式（9），经整理得：

$$\dot V(t)\le\xi^{\mathrm T}(t)\big[\Psi+h^2\Gamma_1^{\mathrm T}R\Gamma_1\big]\xi(t),\tag{10}$$

其中：

$$\begin{cases}\xi(t)=\big[x^{\mathrm T}(t)\ \ x^{\mathrm T}\big(t-\tau(t)\big)\big]^{\mathrm T};\\ \Psi=\begin{bmatrix}PA+A^{\mathrm T}P-R&PBK+R\\ *&-R\end{bmatrix};\\ \Gamma_1=[A\ \ BK]。\end{cases}\tag{11}$$

由Schur补引理[10]，若$\Xi=\Psi+h^2\Gamma_1^{\mathrm T}R\Gamma_1<0$，则式（7）成立，且

$$\dot V(t)\le\xi^{\mathrm T}(t)\Xi\xi(t)<-\lambda_{\min}(-\Xi)\,|x(t)|^2,\tag{12}$$

式中$\lambda_{\min}(-\Xi)$表示矩阵$-\Xi$的最小特征值。由Lyapunov稳定理论知闭环系统（5）渐近稳定。

下面给出控制器的设计方法，由于矩阵不等式（7）含有非线性项PBK，为了解出控制器增益矩阵K，对不等式（7）左乘和右乘$\mathrm{diag}\{P^{-1}\quad P^{-1}\quad R^{-1}\}$，并令$\bar P=P^{-1},\bar R=R^{-1},Y=KP^{-}$，则可得定理2。

定理 2 给定$h>0$，如果存在$\bar P>0,\bar R>0$，以及合适维数的矩阵Y，满足如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}A\bar P+\bar PA^{\mathrm T}-\bar R&BY+\bar R&h\bar PA^{\mathrm T}\\ *&-\bar R&hY^{\mathrm T}B^{\mathrm T}\\ *&*&-\bar P\bar R^{-1}\bar P\end{bmatrix}<0,\tag{13}$$

则闭环系统（5）对$\forall\tau(t)\in[0,h]$均为渐近稳定，且控制器增益$K=Y\bar P^{-1}$。

定理2给出了控制器的设计方法，但由于矩阵不等式（13）含有非线性项$-\bar P\bar R^{-1}\bar P$，不能用数值法直接求解。注意到$\bar R>0$，因此，对于任意$\bar R\ne\bar P$，有$(\bar R-\bar P)\bar R^{-1}(\bar R-\bar P)>0$，即

$$\bar R-2\bar P>-\bar P\bar R^{-1}\bar P,\tag{14}$$

那么，对于任意$\varepsilon>0$，有

$$-\bar P\bar R^{-1}\bar P=-\varepsilon\bar P(\varepsilon\bar R)^{-1}\bar P\le\varepsilon^2\bar R-2\varepsilon\bar P。\tag{15}$$

利用式（15），可得如下定理3。

定理 3 给定$h>0$和$\varepsilon>0$，如果存在$\bar P>0,\bar R>0$，以及合适维数的矩阵Y，满足如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A\bar{P}+\bar{P}A^{\mathrm{T}}-\bar{R} & BY+\bar{R} & h\bar{P}A^{\mathrm{T}} \\ * & -\bar{R} & hY^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \\ * & * & \varepsilon^2\bar{R}-2\varepsilon\bar{P} \end{bmatrix}<0, \quad (16)$$

则闭环系统（5）对$\forall\tau(t)\in[0,h]$均为渐近稳定的，且控制器增益$K=Y\bar{P}^{-1}$。

当系统（1）的系数矩阵具有范数有界不确定性时，即

$$\dot{x}(t)=(A+DFE_1)x(t)+(B+DFE_2)u(t), \quad (17)$$

式中：A, B, D, E_1, E_2为具有适当维数的常数实矩阵；

F为不确定性矩阵且满足

$$F^{\mathrm{T}}F\le I。 \quad (18)$$

在采样控制系统（4）作用下，对应系统（17）的闭环系统为：

$$\dot{x}(t)=(A+DFE_1)x(t)+(B+DFE_2)Kx(t-\tau(t))。 \quad (19)$$

利用引理2，不难得到如下推论1。

推论1　给定h>0和ε>0，若存在$\bar{P}>0$、$\bar{R}>0$，以及合适维数的矩阵Y，当λ>0时，使得以下LMI成立：

$$\begin{bmatrix} A\bar{P}+\bar{P}A^{\mathrm{T}}-\bar{R} & BY+\bar{R} & h\bar{P}A^{\mathrm{T}} & \lambda D & \bar{P}E_1^{\mathrm{T}} \\ * & -\bar{R} & hY^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & 0 & Y^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} \\ * & * & \varepsilon^2\bar{R}-2\varepsilon\bar{P} & \lambda hD & 0 \\ * & * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix}<0, \quad (20)$$

则闭环系统（19）对$\forall\tau(t)\in[0,h]$及所有满足（18）的不确定性均是渐近稳定的，且控制器增益$K=Y\bar{P}^{-1}$。

3　数值示例

讨论具有如下参数的不确定系统：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ g_1 & -1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1+g_2 \end{bmatrix},$$

其中：$|g_1|\le 0.1, |g_2|\le 0.3$。

利用推论1，首先将系统矩阵A, B表示为：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}F\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}F\begin{bmatrix} 0.3 \end{bmatrix}。$$

文献[8]所得到的保证采样系统鲁棒稳定化的最大采样时间间隔为$h\le 0.731$，当h=0.731时，相应的控制器增益K=[-2.093 4　-1.055 9]。而采用本文推论1，当ε=0.13时，求解LMI（19），得到系统对所有容许不确定性在采样控制器（4）作用下均可稳定化的最大采样时间间隔为$h\le 0.805$，当h=0.805时，控制器增益K=[-1.714 6　-0.426 3]。也就是说，只要采样时间间隔在[0, 0.805]范围内，得到的控制器均可使该系统稳定。

4　结语

本文讨论了线性采样控制系统的鲁棒稳定性，将原系统变换成具有分段连续时滞的模型，利用积分不等式及Lyapunov-Krasovskii泛函方法获得了基于LMI的保证系统稳定化的充分条件，同时给出了控制器的设计方法。数值实例说明了本文方法的有效性。

参考文献：

[1] Ye H, Michel A N, Hou L. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1998, 43：461-474.

[2] 张静梅，贾新春. 不确定时变时滞线性系统的鲁棒采样控制[J]. 太原理工大学学报，2009，30(4)：302-308.
Zhang Jingmei, Jia Xinchun. Robust Sampled-Data Control for Uncertain Linear Systems with Time-Varying Delay[J]. Journal of Taiyuan University of Sciecce and Technology, 2009, 30(4)：302-308.

[3] Banieh K, Pearson J, Francis B. et al. A Lifting Technique for Linear Period Systems[J]. Systems & Control Letters, 1991, 17：79-88.

[4] Dullerud G, Glover K. Robust Stabilization of Sampled-Data Systems to Structured LMI Perturbations[J]. IEEE Transactions on Automatica Control, 1993, 38：1497-1508.

[5] Oishi Y. A Bound of Conservativeness in Sampled-Data Robust Stabilization and Its Dependence on Sampling Periods [J]. Systems & Control Letters, 1997, 32：11-19.

[6] Sivashankar N, Khargonekar P. Characterization of the L_2-Induced Norm for Linear Systems with Jumps with Applications to Sampled-Data Systems[J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1994, 32：1128-1150.

[7] Hu L, Cao Y, Shao H. Contrained Robust Sampled-Data Control for Nonlinear Uncertain Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2002, 12：447-464.

[8] 张先明，吴　敏，佘锦华. 线性采样控制系统的鲁棒稳定化[C]// 第24届中国控制会议. 广州：华南理工大学出版社，2005：596-599.
Zhang Xianming, Wu Min, She Jinhua. Robust Stabilization of Linear Sampled-Data Control Systems[C]// The 24th Chinese Control Conference, Guangzhou: South China University of Technology Press, 2005.

[9] Han Q L. Absolute Stability of Time-Delay Systems with Sector-Bounded Nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12)：2171-2176.

[10] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems[J]. Automatica, 1986, 22(4)：397-411.

（责任编辑：李玉珍）