

# 甲型 H1N1 流感传播的 SIR 模型研究

霍 阔, 李世霖

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412008)

**摘 要:** 建立了一个甲型 H1N1 流感传播的改进 SIR 模型, 并用微分方程数值解中的四阶 Runge-Kutta 方法进行求解。用墨西哥的病例数据对模型验证表明, 结果与真实数据基本吻合。SIR 模型所得数据与 GM(1,1) 灰色预测模型数据及二次、四次曲线拟合数据作比较, 可知 SIR 模型误差最小。

**关键词:** SIR 模型; 四阶 Runge-Kutta 方法; GM(1,1) 灰色预测; 曲线拟合

**中图分类号:** O213.2

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2010)04-0040-03

## Study on SIR Mathematical Model of Influenza A (H1N1) Spread

Huo Kuo, Li Shilin

(School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

**Abstract:** Sets up an improved SIR model for the spread of influenza A (H1N1), and uses the fourth-order Runge-Kutta method to solve it. Applies the data of Mexico's cases to verify the model, and it shows that the results are basically tallied with the actual data. By comparing the data obtained by SIR model with data of the GM(1,1) gray prediction model and data of second-order and fourth-order curve-fitting, draws a conclusion that the error of SIR model is minimum.

**Keywords:** SIR model; the fourth-order Runge-Kutta method; GM (1,1) gray prediction; curve fitting

随着医疗水平的提高和人类社会的不断进步, 诸如霍乱、天花、非典等曾经肆虐全球的传染病已不再令人惊恐, 然而一些不断变异的疾病又悄然而至——甲型 H1N1 流感 (简称“甲流”) 开始全球流行。短短几个月的时间, 甲流的传播已经严重影响经济建设和社会发展, 而且有愈演愈烈之势。因此建立传染病模型来描述传染病的传播过程, 分析感染人群的变化规律具有十分重要的现实意义。

## 1 甲流传播模型的建立

### 1.1 模型假设及符号说明

- 1) 总人数  $N$  不变;
- 2) 由于甲流的传染期不是很长, 因此可以不考虑

这段时间内的人口出生率和死亡率;

3) 一个病人一旦与易感者接触就必然具有一定的传染力。假设  $t$  时刻附近单位时间内, 一个病人能传染的易感者数目与此环境内易感者总数  $NS(t)$  成正比, 比例系数为  $\beta$ , 从而在  $t$  时刻附近单位时间内, 被所有病人传染的人数为  $-\beta NS(t)I(t)$ ;

4) 所查找的相关统计数据真实可靠。

文中使用符号说明如下:

$N$  表示城市总人口;

$S(t)$  表示  $t$  时刻易感者的数量比例, 它等于总人口减去患者和恢复者的数量比例;

$I(t)$  表示  $t$  时刻患者的数量比例;

$R(t)$  表示  $t$  时刻恢复者的数量比例;

收稿日期: 2010-01-29

基金项目: 湖南省大学生研究性学习和创新性实验计划基金资助项目 (湘教通[2009]320-229)

通信作者: 霍 阔 (1986-), 男, 河北辛集人, 湖南工业大学学生, 主要研究方向为数学建模与数值计算,

E-mail: hawke1986@126.com

$E(t)$ 表示  $t$  时刻疑似患者的数量比例;

$\beta$ 表示每个患者平均每天有效接触的人数;

$\gamma$ 表示患者平均每天的恢复率;

$\alpha$ 表示患者平均每天的死亡率;

$\omega$ 表示平均每天疑似病人的有效发病率;

$\beta S(t)$ 是单位时间内每个患者感染的人数比例。

## 1.2 SIR 模型

不同类型的传染病传播的过程各有其特点, 我们从不从医学角度研究, 只按传染病的传播机理建立数学模型, 比较经典的就是 SIR 模型<sup>[1-7]</sup>。

1) 根据假设, 每个病人每天可以使  $\beta S(t)$  个健康者变为病人, 病人总数为  $NI(t)$ , 所以每天共有  $\beta S(t)I(t)$  个健康者被感染, 于是病人的增加率为:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\beta S(t)I(t)。$$

2) 病人的转换主要是感染增加的病人  $\beta S(t)NI(t)$  减去被移除的病人 (包括治愈的和死亡的), 即  $(\alpha + \gamma)I(t)$ 。因此, 病人的增加率可以表示为:

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \beta S(t)I(t) - (\alpha + \gamma)I(t)。$$

3) 发病人群与退出人群之间的转换, 单位时间内退出人群的变化等于发病人群的减少量, 即

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = \gamma I(t)。$$

综上所述, SIR 模型是将总人口分为 3 类人群, 即: 易感者  $S$ 、患者  $I$  和恢复者  $R$ , 并且三者之间满足如下模型关系:

$$\begin{cases} S(t) + I(t) + R(t) = 1, \\ \frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\beta S(t)I(t), \\ \frac{\partial I(t)}{\partial t} = \beta S(t)I(t) - (\alpha + \gamma)I(t), \\ \frac{\partial R(t)}{\partial t} = \gamma I(t). \end{cases} \quad (1)$$

用 SIR 模型 (1) 作为研究甲流传播模型。

## 2 甲流传播模型的分析与求解

### 2.1 模型分析

如果是一般的微分方程, 可以通过解微分方程求出解来, 但是对 SIR 模型, 用一般的解微分方程的方法求不出解。因此, 可以采用微分方程数值解中的方法来求模型 (1) 中  $I(t)$ ,  $S(t)$ ,  $R(t)$  的解。常用的方法是四阶 Runge-Kutta 方法, 即

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

其中:  $K_1 = f(t_n, y_n)$ ;

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hK_1}{2}\right);$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hK_2}{2}\right);$$

$$K_4 = f(t_n + h, y_n + hK_3);$$

$$y_0 = \chi。$$

因此可令:

$$f(t, i) = \beta S(t)I(t) - (\alpha + \gamma)I(t),$$

$$f(t, s) = -\beta S(t)I(t),$$

$$f(t, r) = \gamma I(t)。$$

### 2.2 模型求解

因为不同环境、不同地区的感染率、恢复率和死亡率不同, 笔者仅以墨西哥的病例数据为依据, 研究甲流在墨西哥的发展趋势。经过数据收集和分析 (数据从 2009-05-01~31)<sup>[9]</sup>, 可以得出:

$$\beta = 0.040229743, \gamma + \alpha = 0.026967672,$$

$$I(0) = 5029 / (1.8 \times 10^8), S(0) = 1 - 5029 / (1.8 \times 10^8),$$

$$R(0) = 0, N = 1.8 \times 10^8。$$

借助 matlab, 将四阶 Runge-Kutta 方法应用在该模型上, 可以求得未来 10 d 感染人数如下:

$$5096.1, 5164.1, 5233.0, 5302.9, 5373.6,$$

$$5445.3, 5518.0, 5591.6, 5666.2, 5741.8。$$

未来 10 d 感染人数及变化趋势见图 1。

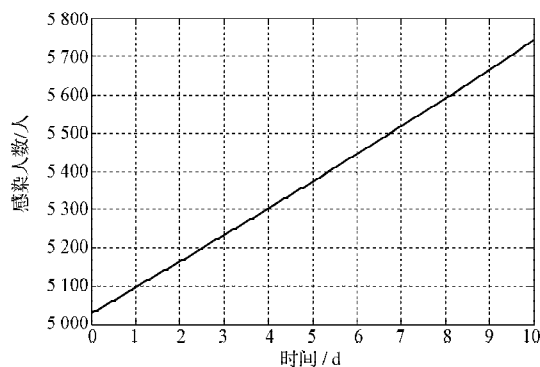


图 1 未来 10 d 的预测图

Fig.1 The prognostic chart of the coming ten days

## 3 甲流传播模型的验证

### 3.1 GM(1,1)灰色预测模型

首先做一次累加序列  $X_1(k) = \sum X(k)$ , 建立白化微分方程, GM(1,1) 模型<sup>[11]</sup>的白化微分方程为:

$$\frac{dX_1}{dt} + aX_1 = b, a, b \text{ 为模型参数。}$$

再对模型参数估计, 用最小二乘法或用 DPS 求解可得  $a = -0.061817$ ,  $b = 972.704013$ , 因此 GM(1,1) 灰色预测模型为:

$$X(t+1)=15742.643\,927\times\exp(-0.061\,817t)-15735.282026。$$

### 3.2 4种方法的结果比较

将 SIR 模型预测数据, GM(1,1)模型预测数据, 二

次曲线、四次曲线拟合预测数据与笔者收集的 2009-06-01~10 的真实数据作比较, 结果见表 1。

由表 1 可以看出, SIR 模型的预测结果与真实值之间的误差比其它 3 种方法都小。

表 1 4 种方法结果比较

Table 1 The comparative results of four methods

真实数据	SIR 模型		GM(1,1)模型		二次拟合		四次拟合	
	数据	误差	数据	误差	数据	误差	数据	误差
502 9	5 096.1	0.013	7 257	0.443	5 624.1	0.118	5 430.4	0.079
502 9	5 164.1	0.026	7 719	0.534	5 806.2	0.154	5 605.2	0.114
502 9	5 233.0	0.040	8 212	0.632	5 988.5	0.190	5 796.6	0.152
502 9	5 302.9	0.054	8 735	0.736	6 171.0	0.227	6 008.6	0.194
502 9	5 373.6	0.068	9 293	0.847	6 353.9	0.263	6 245.2	0.241
556 3	5 445.3	0.021	9 885	0.776	6 536.9	0.175	6 510.7	0.170
556 3	5 518.0	0.008	10 515	0.890	6 720.3	0.208	6 809.9	0.224
571 7	5 591.6	0.021	11 186	0.956	6 903.9	0.207	7 147.6	0.250
571 7	5 666.2	0.008	11 899	1.081	7 087.7	0.239	7 529.0	0.316
571 7	5 741.8	0.004	12 658	1.214	7 271.8	0.271	7 959.7	0.392

## 4 结语

SIR 模型与 GM(1,1)模型、二次及四次拟合相比, 预测结果更接近实际情况, 因此用它来预测传染病的传播比较合理, 也比较科学。SIR 模型要求在考察区域内的人都要经历由易感染人群变成感染者, 又由感染者变成治愈者或者死亡者, 这不太符合现实。因为并不是所有的人都是易感染人群, 会采取一定的隔离措施来减少传染的机会, 所以 SIR 模型有一定的局限性。

### 参考文献:

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.  
Jiang Qiyuan, Xie Jinxing, Ye Jun. Mathematical Model[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003.
- [2] 刘来福, 曾文艺. 数学模型与数学建模[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1997.  
Liu Laifu, Zeng Wenyi. Mathematical Model and Mathematical Modeling[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1997.
- [3] 李伟. 关于 SARS 病毒传播的数学模型[J]. 毕节师范高等专科学校学报, 2004, 22(2): 46-52.  
Li Wei. On Mathematical Model of the Spread of SARS Virus[J]. Journal of Bijie Teachers College, 2004, 22(2): 46-52.
- [4] 李建奎, 刘天喜. SARS 病毒传染的数学模型[J]. 科技情报开发与经济, 2004, 14(2): 163-164.  
Li Jiankui, Liu Tianxi. Mathematical Model for the Infection of SARS Virus[J]. Sci-Tech Information Development & Economy, 2004, 14(2): 163-164.
- [5] 宇永仁. SARS 传播模型及其对经济的影响[J]. 辽宁大学学

报, 2005 32(1): 1-2.

Yu Yongren. The SARS Propagation Models and Influence to Economy[J]. Journal of Liaoning University, 2005, 32(1): 1-2.

- [6] 王汝发. SARS 传播的数学模型分析[J]. 数理医药学杂志, 2004, 17(2): 99-100.  
Wang Rufa. Analysis and Construction of the Mathematical Model on the Spread of SARS[J]. Journal of Mathematical Medicine, 2004, 17(2): 99-100.
- [7] 周永卫, 范贺花. 传染病数学模型的马尔可夫骨架过程建模[J]. 安阳师范学院学报, 2007(2): 33-35.  
Zhou Yongwei, Fan Hehua. The Modeling of Markov Skeleton Process on the Mathematical Model of Infectious Diseases[J]. Journal of Anyang Teachers College, 2007 (2): 33-35.
- [8] 林成森. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.  
Lin Chengsen. Numerical Calculation Method[M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [9] [佚名]. 甲流数据统计[EB/OL]. [2009-05-31]. <http://news.xinhuanet.com/world/2009-05/>.  
[Anon]. Statistical Data of Influenza A(H1N1)[EB/OL]. [2009-05-31]. <http://news.xinhuanet.com/world/2009-05/>.
- [10] 闻新, 周露, 张鸿. Matlab 科学图形构建[M]. 北京: 科学出版社, 2002.  
Wen Xin, Zhou Lu, Zhang Hong. Matlab Scientific Graphical Constructing[M]. Beijing: Science Press, 2002.
- [11] 邓聚龙, 郭洪. 灰色理论[M/EB]. 北京: 全华出版, 2002.  
Deng Julong, Guo Hong. Gray Theory[M/EB]. Beijing: Quan Hua Press, 2002.

(责任编辑: 邓光辉)