第24卷 第4期
2010年7月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.4
July 2010

求解线性二层规划的割平面法

徐林西，成央金，李光荣，吕婷婷

（湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105）

摘 要：基于线性二层规划的全局最优解可在其约束域的极点上达到这一性质，利用约束域顶点的相邻极点产生割平面，设计了一种求解上层带约束的线性二层规划的割平面法，并给出了算例。

关键词：线性二层规划；极点；割平面法

中图分类号：O221.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)04-0036-04

A Cutting Plane Algorithm for Solving Linear Bilevel Program

Xu Linxi, Cheng Yangjin, Li Guangrong, Lv Tingting

（School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan Hunan 411105, China）

Abstract: Based on the result that a global optimal solution to linear bilevel programming occurs at the extreme point of its constraint regain, uses adjacent extreme point to get the cutting plane and designs a cutting plane algorithm for solving linear bilevel programming with the upper-level constraint. And a simple example is given to illustrate the application of the algorithm.

Keywords: linear bilevel programming; extreme point; cutting plane algorithm

1 背景知识

多层规划问题是在研究一系列递阶层次系统时产生的，它通常是用2个或多个最优化问题来刻画的，其中每层问题的约束域全都部分受限于下层问题的最优响应。现代生产管理系统和经济模型中的许多问题都可以用多层规划来表述[1]。多层规划主要研究各自具有目标函数的多个决策者按照非合作和有序的方式进行决策，任何一方的决策行为都影响着其他人的决策选择和目标实现，但又不能完全控制其他人的选择行为的决策问题。

在多层规划问题中，二层规划最为常见，且任何多层规划都是由一系列二层规划复合构成的，因此，对二层规划问题的研究显得尤为重要。由于二层规划问题具有极其复杂的几何性质，已被证明是NP-难问题[2]。目前，人们对二层规划的研究大多数还局限于线性二层规划问题，并提出了一些算法，如，1）极点搜索算法[3-4]：利用线性二层规划最优解的极点可达性和单纯形法对容许集的顶点进行枚举；2）KKT（Karush-Kuhn-Tucker）算法[5-6]：基本思想是将下层问题用与之等价的KKT条件代替，然后利用某种策略处理互补松弛条件；3）罚函数算法[7]：利用罚函数理论，将线性二层规划转化为含有精确罚因子的单层数学规划；4）智能算法：如遗传算法[8]，禁忌搜索算法，模拟退火算法等。

本文所采用的割平面算法是由Hoang Tuy于1964年提出的，最初用于凹规划的求解。目前，对于线性二层规划应用割平面算法的很少[9]，且只求解下层含有约束的线性二层规划问题。本文据Shi Chenggen等[10]对线性二层规划最优解的新定义，利用约束域顶点的相邻极点产生割平面，将搜索区域逐渐缩小，最终找到上下层都带有约束的线性二层规划的最优解。该算

收稿日期：2009-09-14

通信作者：徐林西（1984-），女，湖南株洲人，湘潭大学硕士研究生，主要研究方向为多级规划，E-mail：linxi0427@sina.com

法的优点是在单纯形法中求解相邻极点，减少了计算量，有利于求解较大规模的线性二层规划问题。

2　模型，定义与性质

本文考虑如下形式的线性二层规划问题：

$$(\mathrm{BLP})\begin{cases}\min\limits_{x} F(x,y)=\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}x+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}y,\\ \quad \text{s.t. } \boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1y\le \boldsymbol{b}_1, x\ge 0,\\ \quad \text{其中 } y \text{ 的解为}\\ \qquad \min\limits_{y} f(x,y)=\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}x+\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y;\\ \quad \text{s.t. } \boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2y\le \boldsymbol{b}_2,\ y\ge 0。\end{cases}$$

式中：$F,f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^1$，$x\in\mathbf{R}^n$，$y\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{b}_1\in\mathbf{R}^p$，$\boldsymbol{b}_2\in\mathbf{R}^q$，$\boldsymbol{A}_1\in\mathbf{R}^{p\times n}$，$\boldsymbol{A}_2\in\mathbf{R}^{q\times n}$，$\boldsymbol{B}_1\in\mathbf{R}^{p\times m}$，$\boldsymbol{B}_2\in\mathbf{R}^{q\times m}$。

定义 1[10]　a）线性二层规划（linear bilevel programming，简称BLP）的约束域为：

$$S=\{(x,y):\ \boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1y\le\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2y\le\boldsymbol{b}_2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\};$$

b）线性二层规划（BLP）的约束域 S 在上层决策空间的投影为：

$$T=\{x\ge 0,\ \exists y\ge 0,\ \boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1y\le\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2y\le\boldsymbol{b}_2\};$$

c）对 $\forall x\in T$，下层问题的可行解集为：

$$S(x)=\{y\ge 0:(x,y)\in S\};$$

d）对于 $\forall x\in T$，下层问题的合理反应集为：

$$P(x)=\{y\ge 0:\ y\in\arg\min[f(x,y):y\in S(x)]\};$$

e）线性二层规划（BLP）的诱导域为：

$$IR=\{(x,y):(x,y)\in S,\ y\in P(x)\}。$$

定义 2　若 $(x^*,y^*)\in IR$，对任意给定的 $(x,y)\in IR$，假如 $F(x^*,y^*)\le F(x,y)$ 成立，则称 (x^*,y^*) 为线性二层规划（BLP）的最优解。

定义 3　设 X^0 为凸集 X 的 1 个凸子集，如果 X 中任意 1 条闭线段只要有 1 个相对内点在 X 中，且线段的 2 个端点也在 X 中，则称 X^0 为 X 的 1 个面。

定义 4　如果 X^1 为凸集 X 的若干个面的并，则称 X^1 为 X 的弱拟凸子集。

假设 1　约束域 S 是非空紧集。

在此假设下，约束域 S 是多胞形，故 S 的极点个数有限。通常极点个数有限时，这些点也称作顶点。

假设 2　对 $\forall x\in T$，下层问题在 $S(x)$ 上具有唯一的最优解。

在上述 2 个假设下，类似 Bialas 和 Karwan[11]的证明可以得到以下结论。

引理 1　线性二层规划（BLP）的诱导域 IR 是约束域 S 的若干个面的并。

引理 2　BLP 的诱导域 IR 是闭连通的，且 IR 的极点即为 S 的极点。

引理 3　若 BLP 有最优解，则必在 S 的某个极点上达到。

在定义 1 的条件下，根据对偶理论，把 BLP 降层化为如下形式：

$$\begin{cases}\min\limits_{x} F(x,y)=\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}x+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}y,\\ \quad\text{s.t. } \boldsymbol{A}_1x+\boldsymbol{B}_1y\le\boldsymbol{b}_1,\\ \qquad \boldsymbol{A}_2x+\boldsymbol{B}_2y\le\boldsymbol{b}_2,\\ \qquad \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y-(\boldsymbol{A}_1x-\boldsymbol{b}_1)^{\mathrm{T}}u_1-(\boldsymbol{A}_2x-\boldsymbol{b}_2)^{\mathrm{T}}u_2=0,\\ \qquad -\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}u_1-\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}u_2\le\boldsymbol{d}_2,\\ \qquad x\ge 0, y\ge 0, u_1\ge 0, u_2\ge 0。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$u_1\in\mathbf{R}^p$，$u_2\in\mathbf{R}^q$。

令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$，

则式（1）可化为：

$$\begin{cases}\min\limits_{x} F(x,y)=\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}x+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}y,\\ \quad\text{s.t. } \boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}y\le\boldsymbol{b},\\ \qquad \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y-(\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}=0,\\ \qquad -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{d}_2,\\ \qquad x\ge 0, y\ge 0, \boldsymbol{u}\ge 0。\end{cases}\tag{2}$$

记 $U=\{\boldsymbol{u}:-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{d}_2,\ \boldsymbol{u}\ge 0\}$，$\boldsymbol{u}^E$ 为 U 的极点组成的集合。令 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为 $\max\{(\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}:-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{d}_2,\ \boldsymbol{u}\ge 0\}$ 的最优解，则 $\bar{\boldsymbol{u}}\in\boldsymbol{u}^E$，并记

$$S(\bar{\boldsymbol{u}})=\{(x,y)\in S,\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y-(\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}=0\}。$$

定理 1　$S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 的极点是 S 的极点。

证明　要证 $S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 的极点是 S 的极点，即证 $S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 为 S 的弱拟凸子集。

先证 $S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 为 S 的一个面。因 $S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 是由非空凸集 S 和线性约束 $\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y-(\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}=0$ 的交构成的，所以 $S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 是非空紧凸集。下证 $S(\bar{\boldsymbol{u}})\subset IR$。记 $Q(x)=\min\{\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y:\boldsymbol{B}y\le\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}x,\ y\ge 0\}$，其对偶问题为 $D(x)=\max\{(\boldsymbol{A}x-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}:-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\le\boldsymbol{d}_2,\ \boldsymbol{u}\ge 0\}$，对给定的 x，有 $Q(x)=D(x)$，因

$$IR=\{(x,y):(x,y)\in S,\ y\in P(x)\}=\{(x,y):(x,y)\in S,\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y-Q(x)=0\},$$

由 $S(\bar{\boldsymbol{u}})$ 的定义知 $S(\bar{\boldsymbol{u}})\subset IR$。

然后，令$(x_1, y_1),(x_2, y_2)\in S$，存在$\lambda\in(0,1)$，满足$\lambda(x_1, y_1)+(1-\lambda)(x_2, y_2)\in S(\bar{u})$。由弱拟凸集的定义知，只需证$(x_1, y_1),(x_2, y_2)\in S(\bar{u})$。因为

$$\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\right)\in S(\bar{u}),$$

故有

$$\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\left(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\right)-\left(\boldsymbol{A}\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)-\boldsymbol{b}\right)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}=0,$$

得到

$$\lambda\left(\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y_1-(\boldsymbol{A}x_1-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}\right)+(1-\lambda)\left(\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y_2-(\boldsymbol{A}x_2-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}\right)=0。\quad(3)$$

因$\bar{\boldsymbol{u}}\in\boldsymbol{u}^E$，对给定的$x_1, x_2$，由对偶理论的性质有

$$\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y_1\geq(\boldsymbol{A}x_1-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y_2\geq(\boldsymbol{A}x_2-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}。\quad(4)$$

由式（3）和（4）可得：

$$\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y_1=(\boldsymbol{A}x_1-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y_2=(\boldsymbol{A}x_2-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}。$$

已知$(x_1, y_1),(x_2, y_2)\in S$，故有$(x_1, y_1),(x_2, y_2)\in S(\bar{u})$，$S(\bar{u})$的极点即为$S$的极点，证毕。

定理2 设$(\bar{x},\bar{y})$为S的1个极点，$S(\bar{x},\bar{y})$是$(\bar{x},\bar{y})$引出的任意1个面。若$(\bar{x},\bar{y})\notin IR$，则$\forall(x,y)\in\operatorname{int}S(\bar{x},\bar{y})$，有$(x,y)\notin IR$。

证明 反证法。假设$(x,y)\in IR$，在$S(\bar{x},\bar{y})$上任意取1点(x^1,y^1)，使得当$0<\lambda<1$时，有

$$(x,y)=\lambda(\bar{x},\bar{y})+(1-\lambda)(x^1,y^1)\in IR$$

成立。因为IR是S的弱拟凸子集，所以$(\bar{x},\bar{y})\in IR$与已知矛盾，故定理得证。

由定理2知，若$(\bar{x},\bar{y})$不是BLP的可行解，则$(\bar{x},\bar{y})$与它所有相邻极点构成的面上的内点都不是BLP的可行解。因此，由$(\bar{x},\bar{y})$所有相邻极点构成的平面把S分为2部分$S_1(\bar{x},\bar{y})$和$S_2(\bar{x},\bar{y})$，若$(\bar{x},\bar{y})\in S_1(\bar{x},\bar{y})$，则只需在$S_2(\bar{x},\bar{y})$上继续寻找BLP的最优解。

3 割平面

算法的关键是确定由所有相邻极点构成的平面。首先用单纯形法求解线性规划$\{\min F(x,y)\ \text{s.t.}(x,y)\in S\}$的最优解$(x^0,y^0)$，同时获得1个最优单纯形表。显然$(x^0,y^0)$为$S$的1个极点，而$(x^0,y^0)$的所有相邻极点可按下述方法获得。

在最优表中，选取1个非基变量作为进基变量，由θ规则确定好出基变量后进行旋转运算，得到1个新的单纯形表，即获得1个新的极点。然后再在最优表中选取另一个非基变量，依此迭代，直到所有的非基变量都取完，则可得到(x^0,y^0)的所有相邻顶点$(\overline{x^1},\overline{y^1}),\cdots,(\overline{x^t},\overline{y^t})$（显然$t\leq n+m$）。

接下来，令H为通过(x^0,y^0)的所有相邻极点的平面，并设(x^0,y^0)与所有相邻极点构成1个多面体P，若(x^0,y^0)不是BLP的可行解，则由定理2知，$\forall(x,y)\in(P\setminus H)$都不是BLP的最优解，且$(\overline{x^1},\overline{y^1}),\cdots,(\overline{x^t},\overline{y^t})$线性无关（若$t<n+m$，则把$(\overline{x^1},\overline{y^1}),\cdots,(\overline{x^t},\overline{y^t})$扩充为$n+m$维线性无关向量组）。

$$设\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\overline{x^1}-x^0 & \cdots & \overline{x^t}-x^0\\ \overline{y^1}-y^0 & \cdots & \overline{y^t}-y^0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}^0=\begin{pmatrix}x^0\\ y^0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}x-x^0\\ y-y^0\end{pmatrix},$$

则$H=\{(x,y):(x,y)=\boldsymbol{Q}\lambda+\boldsymbol{z}^0,\ \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\lambda=1\}$，

式中：$\boldsymbol{e}$为分量全为1的列向量。

由上述可知$|\boldsymbol{Q}|\neq 0$，故$H=\{(x,y):\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\lambda=1\}$，也称$H$为割平面。

由H生成的2个半平面为$H^+=\{(x,y):\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\lambda\geq 1\}$，$H^-=\{(x,y):\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\lambda\leq 1\}$，显然$(x^0,y^0)\in H^-$。令

$$S^1=S\cap H^+=\{(x,y):(x,y)\in S, \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\lambda\geq 1\},$$

则可在S^1上讨论BLP的最优解。

通过以上讨论，现将割平面算法描述如下：

Step 0：令$S^0=S$，置$k=0$。

Step 1：用单纯形法求解线性规划

$$\min\{\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}x+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}y:(x,y)\in S^k\},$$

得到S^k上的1个极点(x^k,y^k)和最优单纯形表。

Step 2：对给定的x^k，解线性问题

$$\min\{\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}y:y\in S(x^k)\},$$

得到最优解$\bar{y}$，若$\bar{y}=y^k$，则停止迭代，(x^k,y^k)即为BLP的最优解；否则转Step 3。

Step 3：利用前面给出的方法求出(x^k,y^k)在S^k中的所有相邻极点$(\overline{x^1},\overline{y^1}),\cdots,(\overline{x^t},\overline{y^t})$。

Step 4：构造方阵$\boldsymbol{Q}$，并求出$\boldsymbol{Q}^{-1}$。

Step 5：令$S^{k+1}=\{(x,y):(x,y)\in S^k, \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\lambda z\geq 1\}$，其中$\boldsymbol{e}$为分量全为1的$n+m$维列向量。置$k=k+1$，转Step 1。

4 算例

下面用 1 个例子来说明算法的执行过程。

$$\begin{cases} \min\limits_{x} F(x,y) = x - 4y, \\ \quad \text{s.t.} -x - y \le -3, 3x - 2y \le 4, x \ge 0, \\ \quad 其中\ y\ 的解为 \\ \qquad \min\limits_{y} f(x,y) = x + y; \\ \quad \text{s.t.} -2x + y \le 0, 2x + y \le 12,\ y \ge 0。 \end{cases}$$

解　1）令 $S=\{(x,y):-x-y\le -3, 3x-2y\le 4, -2x+y\le 0, 2x+y\le 12, x\ge 0, y\ge 0\}$，置 $S^0=S$。由 Step 1 解 $\min\{x-4y:(x,y)\in S^0\}$，得 $(x^0,y^0)=(3,6)$，则可得该线性规划问题的最优表见表 1。

表 1　最优表

Table 1　The optimal table

	x	y	y_2	y_1	y_3	y_4	b
y	0	1	0	0	1/2	1/2	6
y_2	0	0	0	1	7/4	1/4	7
x	1	0	0	0	- 1/4	1/4	3
y_1	0	0	1	0	1/4	3/4	6

由 Step 2 解 $\min\{y: y\in S(3)\}$，得 $\overline{y}=5/2$，则 $\overline{y}\ne y^0$。由 Step 3 求 (x^0,y^0) 的相邻极点。由表 1 可知 y_3,y_4 为非基变量，取 y_3 为进基变量，用规则 $\theta=\min\left\{\frac{b_i}{a_{i5}}\middle| a_{i5}>0\right\}=\frac{b_2}{a_{25}}$，取得 y_2 为出基变量，进行单纯行旋转运算，得到极点 (4,4)；同理，取 y_4 为进基变量，得到另一个极点 (1,2)。因此 (x^0,y^0) 的相邻极点为 (4,4) 和 (1,2)，故有

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix},$$

$$S^1=\{(x,y):(x,y)\in S^0, \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}(x-3,y-6)^{\mathrm{T}}\ge 1\}= \{(x,y):(x,y)\in S^0, -2x+3y\le 4\}。$$

2）由 Step 1 解 $\min\{x-4y:(x,y)\in S^1\}$，求得 (x^1,y^1)=(4,4)，由 Step 2 解 $\min\{y: y\in S(4)\}$，得 $\overline{y}=4$，则 $\overline{y}=y^1$，停止迭代，得到原问题的最优解 (x^1,y^1)=(4,4)，最优值 F^* = -12，结果与文献[12-13] 中一致。

5 结语

本文利用线性二层规划的全局最优解可在其约束域的极点上达到这一性质，利用约束域顶点的相邻极点产生割平面来求解上下层都带约束的线性二层规划，并用数值实例验证了该方法的有效性和可行性。但是对于下层解不唯一，约束域不是非空有界的线性二层规划问题，情况又将如何处理，这是笔者下一步将要进行的工作。

参考文献：

[1] Amat J F, Mccarl B. A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem[J]. Journal of Operations Research Society, 1981, 32：783-792.

[2] Candler W, Townsely R. A Linear Two-Level Programming Problem[J]. Computers and Operations Research, 1982, 9(1)：59-76.

[3] Bard J F. Optimality Conddition for the Bilevel Programming Problem[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1984, 31(5)：13-26.

[4] Onal H. A Modified Simplex Approach for Solving Bilevel Linear Programming Problems[J]. European Journal of Operation Research, 1993, 67(6)：126-135.

[5] Bard J F, Moore J T. A Branch and Bound Algorithm for the Bilevel Programming Problem[J]. SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing, 1990, 11(2)：281-292.

[6] Hansen P, Jaumard B, Savard G. New Branch-Bound Rules for Linear Bilevel Programming[J]. SIAM Journal of Scientific Statistic Computing, 1992, 13(5)：1194-1217.

[7] White D J, Anandalingam G. A Penalty Function for Solving Bilevel Linear Programs[J]. Journal of Global Optimization, 1993, 3(2)：397-419.

[8] Oduguwa V, Roy R. Bilevel Optimisation Using Genetic Algorithm[J]. IEEE International Conference on Artificial Interlligence Systems, 2002, 15(3)：322-327.

[9] Zhao Maoxian, Gao Ziyou. A Globally Algorithm for Solving the Bilevel Linear Programming Problem[J]. Operation Research Transactions, 2005, 9(2)：57-62.

[10] Shi Chenggen, Zhang Guangquan, Liu Jie. On the Definition of Linear Bilevel Programming Solution[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 160(1)：169-176.

[11] Bialas W F, Karwan M H. Two-Level Linear Programming[J]. Management Science, 1984, 30(8)：1004-1020.

[12] Shi Chenggen, Zhang Guangquan, Liu Jie. An Extened kth-Best Approach for Linear Bilevel Programming[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 164：843-855.

[13] 吕一兵，万仲平，王广明，等. 关于线性二层规划分枝定界方法的探讨[J]. 运筹与管理，2006，15(5)：24-28.

Lv Yibing, Wan Zhongping, Wang Guangmin, et al. A Discussion on the Branch and Bound Approach to Linear Bilevel Programming[J]. Operation Research and Management Science, 2006, 15(5)：24-28.

（责任编辑：李玉珍）