二阶脉冲积分 - 微分方程周期边值问题的极限解

赵育林，徐承杰

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：应用上下解方法和单调迭代技巧，给出了一类二阶混合型脉冲积分 - 微分方程周期边值问题存在最大、最小解的充分条件。

关键词：脉冲积分 - 微分方程；上下解；单调迭代技巧；周期边值问题。

中图分类号：O175.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)04-0027-05

Extremal Solutions of Periodic Boundary Value Problems for Second-Order Impulsive Integro-Differential Equations

Zhao Yulin，Xu Chengjie

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：By means of lower and upper solution and the monotone iterative technique, presents sufficient conditions for the existence of minimal and maximal solutions of periodic boundary value problems of second-order mixed impulsive integro-differential equations.

Keywords：impulsive integro-differential equation; lower and upper solutions; monotone iterative technique; periodic boundary value problems

脉冲微分方程是近些年发展起来的微分方程的一个重要分支，它来源于物理学、生物学和医学的一些数学模型[1-3]。由于脉冲微分方程的结构有着深刻的物理背景和现实的数学模型，脉冲微分方程的理论已经引起了广泛的关注[1-6]。

1　问题的提出

考虑如下的二阶混合型脉冲积分 - 微分方程：

$$\begin{cases}-u''(t)=f(t,u(t),Ku(t),Su(t)),\\ \quad t\in J=[0,T],t\neq t_k;\\ \Delta u(t_k)=I_k(u(t_k)),\Delta u'(t_k)=I_k^*(u(t_k)),\\ \quad k=1,2,\cdots,m。\end{cases}\tag{1}$$

带边值条件：

$$u(0)=u(T)+\lambda_1u'(T)+\delta_1，u'(0)=\lambda_2u'(T)+\delta_2。\tag{2}$$

设$\lambda_0=\lambda_1/(1+\lambda_2)$，$\delta_0=\delta_1-\lambda_1\delta_2/(1+\lambda_2)$，其中：$\lambda_1\geq 0, \lambda_2>0$，从而条件（2）变为：

$$u(0)=u(T)+\lambda_0\left[u'(0)+u'(T)\right]+\delta_0，u'(0)=\lambda_2u'(T)+\delta_2。$$

另一方面，如果

$$u(0)=u(T)+\lambda_1\left[u'(0)+u'(T)\right]+\delta_1，u'(0)=\lambda_2u'(T)+\delta_2，$$

那么条件（2）等价于：

$$u(0)=u(T)+\lambda_1(1+\lambda_2)u'(T)+\lambda_1\delta_2+\lambda_1，$$

$$u'(0)=\lambda_2u'(T)+\delta_2，其中：\lambda_1(1+\lambda_2)>0。$$

因此，要得到边值问题（1）~（2）的解的存在性条件，只要考虑如下的二阶混合型脉冲积分 - 微分方程周期边值问题：

收稿日期：2010-04-08

基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（09C320）

通信作者：徐承杰（1982-），男，湖北汉川人，湖南工业大学教师，硕士，主要研究方向为代数学及其应用，稳定性理论，E-mail：Xu-chengjie@163.com

$$\begin{cases}-u''(t)=f\left(t,u(t),Ku(t),Su(t)\right),\\ \quad t\in J=[0,T],t\neq t_k\text{；}\\ \Delta u\left(t_k\right)=I_k\left(u\left(t_k\right)\right),\Delta u'\left(t_k\right)=I_k^*\left(u\left(t_k\right)\right),\\ \quad k=1,2,\cdots,m\text{；}\\ u(0)=u(T)+\lambda_1\left[u'(0)+u'(T)\right]+\delta_1\text{；}\\ u'(0)=\lambda_2u'(T)+\delta_2\text{。}\end{cases}\tag{3}$$

其中：$f\in C\left(J\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$；$I_k,I^*_k\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$；

$\Delta u\left(t_k\right)=u\left(t_k^+\right)-u\left(t_k^-\right)$，

$u\left(t_k^-\right)$和$u\left(t_k^+\right)$是$u(t)$在点$t=t_k$处的左、右极限；

$\Delta u'\left(t_k\right)=u'\left(t_k^+\right)-u'\left(t_k^-\right)$，

$u'\left(t_k^-\right)$和$u'\left(t_k^+\right)$是$u'(t)$在点$t=t_k$处的左、右极限；

$Ku(t)=\int_0^t k\left(t,s\right)u\left(s\right)\mathrm{d}s$，

$k\left(t,s\right)\in C\left(\Omega,\mathbb{R}^+\right)$，$\Omega=\left\{(t,s)\in J\times J,t\geq s\right\}$，

$\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$；

$Su(t)=\int_0^T h\left(t,s\right)u\left(s\right)\mathrm{d}s$，

$h\left(t,s\right)\in C\left(J\times J,\mathbb{R}^+\right)$；

$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$；

$J_0=[0,t_1]$，$J_1=(t_1,t_2]$，$\cdots$，$J_m=(t_m,T]$；

$J'=J\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$；

$k_0=\max\left\{k(t,s):(t,s)\in\Omega\right\}$；

$h_0=\max\left\{h(t,s)\in J\times J\right\}$；

$\tau=\max\left\{t_k-t_{k-1}:k=0,1,\cdots,m+1\right\}$；

$\lambda_1\geq 0$，$\lambda_2>0$；

$\delta_1,\delta_2\in\mathbb{R}$。

令$PC[J,\mathbb{R}]=\{u:J\to\mathbb{R}$在$t\neq t_k$处连续，在$t=t_k$处左连续，且$u\left(t_k^+\right)$存在，$k=1,2,\cdots,m\}$；

$PC^1[J,\mathbb{R}]=\{u\in PC[J,\mathbb{R}]$，$u'(t)$在$t\neq t_k$处连续，且$u\left(t_k^-\right),u\left(t_k^+\right)$存在，$k=1,2,\cdots,m\}$。

显然，在范数$\|u\|_{PC^1}=\sup\left\{\|u\|_{PC},\|u'\|_{PC}\right\}$下，$PC^1[J,\mathbb{R}]$成为一个Banach空间，其中$\|u\|_{PC}=\sup_{t\in J}|u(t)|$。

如果$u\in E=PC^1[J,\mathbb{R}]\cap C^2[J',\mathbb{R}]$满足式（3），则称其为边值问题的解。

定义1 如果存在常数$M>0$，$L\geq 0$，$N\geq 0$和$L_k\geq 0$，$L^*_k\geq 0$使

$$\begin{cases}-\alpha''(t)\leq f\left(t,\alpha(t),K\alpha(t),S\alpha(t)\right)-a(t),\quad t\in J'\text{；}\\ \Delta\alpha\left(t_k\right)\leq I_k\left(\alpha\left(t_k\right)\right)+m_k,\Delta\alpha'\left(t_k\right)\geq I_k^*\left(\alpha\left(t_k\right)\right)+l_k,\\ \quad k=1,2,\cdots,m\text{；}\\ \alpha(0)=\alpha(T)+\lambda_1\left[\alpha'(0)+\alpha'(T)\right]\text{。}\end{cases}$$

其中：
$$a(t)=\begin{cases}0,\quad \alpha'(0)\geq\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2\text{；}\\ \dfrac{\left[M+k_0Nt+h_0LT\right]T}{2\lambda_2}\left[\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2-\alpha'(0)\right],\\ \quad \alpha'(0)<\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2\text{；}\end{cases}$$

$$m_k=\begin{cases}0,\quad \alpha'(0)\geq\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2\text{；}\\ -\dfrac{L_k}{\lambda_2}\left[\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2-\alpha'(0)\right],\\ \quad \alpha'(0)<\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2\text{；}\end{cases}$$

$$l_k=\begin{cases}0,\quad \alpha'(0)\geq\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2\text{；}\\ \dfrac{L_k^*\min\left[t_k,T-t_k\right]}{\lambda_2}\left[\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2-\alpha'(0)\right],\\ \quad \alpha'(0)<\lambda_2\alpha'(T)+\delta_2\text{。}\end{cases}$$

和
$$\begin{cases}-\beta''(t)\geq f\left(t,\beta(t),K\beta(t),S\beta(t)\right)+b(t),\quad t\in J'\text{；}\\ \Delta\beta\left(t_k\right)\geq I_k\left(\beta\left(t_k\right)\right)-m_k^*,\ \Delta\beta'\left(t_k\right)\leq I_k^*\left(\beta\left(t_k\right)\right)-l_k^*,\\ \quad k=1,2,\cdots,m\text{；}\\ \beta(0)=\beta(T)+\lambda_1\left[\beta'(0)+\beta'(T)\right]\text{。}\end{cases}$$

其中：
$$b(t)=\begin{cases}0,\quad \beta'(0)\leq\lambda_2\beta'(T)+\delta_2\text{；}\\ \dfrac{\left[M+k_0Nt+h_0LT\right]T}{2\lambda_2}\left[\beta'(0)-\lambda_2\beta'(T)-\delta_2\right],\\ \quad \beta'(0)>\lambda_2\beta'(T)+\delta_2\text{；}\end{cases}$$

$$m_k^*=\begin{cases}0,\quad \beta'(0)\leq\lambda_2\beta'(T)+\delta_2\text{；}\\ -\dfrac{L_k}{\lambda_2}\left[\beta'(0)-\lambda_2\beta'(T)-\delta_2\right],\\ \quad \beta'(0)>\lambda_2\beta'(T)+\delta_2\text{；}\end{cases}$$

$$l_k^*=\begin{cases}0,\quad \beta'(0)\leq\lambda_2\beta'(T)+\delta_2\text{；}\\ \dfrac{L_k^*\min\left[t_k,T-t_k\right]}{\lambda_2}\left[\beta'(0)-\lambda_2\beta'(T)-\delta_2\right],\\ \quad \beta'(0)>\lambda_2\beta'(T)+\delta_2\text{。}\end{cases}$$

则函数$\alpha,\beta\in PC^1[J,\mathbb{R}]\cap C^2[J',\mathbb{R}]$为边值问题（3）的上下解。

2 几个引理

考查下面线性脉冲积分-微分方程周期边值问题：

$$\begin{cases}-u''(t)+Mu(t)=\sigma(t)-NKu(t)-LSu(t),\\ \quad t\in J=[0,T],t\neq t_k\text{；}\\ \Delta u\left(t_k\right)=L_ku'\left(t_k\right)+I_k\left(\eta\left(t_k\right)\right)-L_k\eta'\left(t_k\right),\\ \Delta u'\left(t_k\right)=L_k^*u\left(t_k\right)+I_k^*\left(\eta\left(t_k\right)\right)-L_k^*\eta\left(t_k\right),\\ \quad k=1,2,\cdots,m\text{；}\\ u(0)=u(T)+\lambda_1\left[u'(0)+u'(T)\right]+\delta_1\text{；}\\ u'(0)=\lambda_2u'(T)+\delta_2\text{。}\end{cases}\tag{4}$$

其中：

$M>0, L\ge 0, N\ge 0$；$L_k\ge 0, L^*_k\ge 0$；

$I_k, I_k^*\in C[J,\mathbb{R}]$；$\sigma(t)\in PC[J,\mathbb{R}]$；

$\eta(t)\in PC^1[J,\mathbb{R}]$；$\lambda_1\ge 0, \lambda_2>0$；

$\delta_1,\delta_2\in\mathbb{R}$。

引理 1 若 $u\in E$ 是问题（4）的解，则 $u\in PC^1[J,\mathbb{R}]$ 是线性脉冲积分方程：

$$u(t)=\int_0^T G_1(t,s)\left[\sigma(s)-N(Ku)(s)-L(Su)(s)\right]\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^m\Big[-G_1(t,t_k)\big(L_k^*u(t_k)+I_k^*(\eta(t_k))-L_k^*\eta(t_k)\big)+G_2(t,t_k)\big(L_ku'(t_k)+I_k(\eta(t_k))-L_k\eta'(t_k)\big)\Big]+z(t)\quad(5)$$

的解，其中：

$$z(t)=\frac{1}{2\theta C}\Big[(\theta\delta_1+\theta\lambda_1\delta_2-\delta_2)\mathrm{e}^{-\theta t}+(\theta\delta_1+\theta\lambda_1\delta_2+\delta_2)\mathrm{e}^{\theta t}+(\delta_2+\theta\lambda_1\delta_2-\theta\lambda_2\delta_1)\mathrm{e}^{\theta(T-t)}+(\theta\lambda_1\delta_2-\delta_2-\theta\lambda_2\delta_1)\mathrm{e}^{\theta(t-T)}\Big]；$$

$$G_1(t,s)=\frac{1}{2\theta C}\begin{cases}\left(1-\tilde{A}\mathrm{e}^{\theta T}\right)\mathrm{e}^{\theta(s-t)}+\left(\tilde{B}\mathrm{e}^{-\theta T}-1\right)\mathrm{e}^{\theta(t-s)}+\\ \quad\frac{1}{2}\left(1-\tilde{D}\right)\mathrm{e}^{\theta(s+t-T)}-\frac{1}{2}\left(1+\tilde{F}\right)\mathrm{e}^{\theta(T-t-s)},\\ \quad 0\le s<t\le T;\\ \left(\tilde{B}\mathrm{e}^{-\theta T}-\lambda_2\right)\mathrm{e}^{\theta(s-t)}+\left(\lambda_2-\tilde{A}\mathrm{e}^{\theta T}\right)\mathrm{e}^{\theta(t-s)}+\\ \quad\frac{1}{2}\left(1-\tilde{D}\right)\mathrm{e}^{\theta(s+t-T)}-\frac{1}{2}\left(1+\tilde{F}\right)\mathrm{e}^{\theta(T-t-s)},\\ \quad 0\le t\le s\le T;\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\frac{1}{2\theta C}\begin{cases}\left(1-\tilde{A}\mathrm{e}^{\theta T}\right)\mathrm{e}^{\theta(s-t)}-\left(\tilde{B}\mathrm{e}^{-\theta T}-1\right)\mathrm{e}^{\theta(t-s)}+\\ \quad\frac{1}{2}\left(1-\tilde{D}\right)\mathrm{e}^{\theta(s+t-T)}+\frac{1}{2}\left(1+\tilde{F}\right)\mathrm{e}^{\theta(T-t-s)},\\ \quad 0\le s<t\le T;\\ \left(\tilde{B}\mathrm{e}^{-\theta T}-\lambda_2\right)\mathrm{e}^{\theta(s-t)}-\left(\lambda_2-\tilde{A}\mathrm{e}^{\theta T}\right)\mathrm{e}^{\theta(t-s)}+\\ \quad\frac{1}{2}\left(1-\tilde{D}\right)\mathrm{e}^{\theta(s+t-T)}+\frac{1}{2}\left(1+\tilde{F}\right)\mathrm{e}^{\theta(T-t-s)},\\ \quad 0\le t\le s\le T;\end{cases}$$

其中：$\tilde{A}=\frac{1}{2}(1+\lambda_2)(1+\theta\lambda_1)$；$\tilde{B}=\frac{1}{2}(1+\lambda_2)(1-\theta\lambda_1)$；

$\tilde{D}=\theta\lambda_1\lambda_2+\theta\lambda_1+\lambda_2$；$\tilde{F}=\theta\lambda_1\lambda_2+\theta\lambda_1-\lambda_2$；$\theta=\sqrt{M}$；

$$C=(1+\lambda_2)\left(1-\frac{1}{2}(1+\theta\lambda_1)\mathrm{e}^{\theta T}-\frac{1}{2}(1-\theta\lambda_1)\mathrm{e}^{-\theta T}\right)。$$

引理 2 设 $M>0, L\ge 0, N\ge 0$ 和 $L_k\ge 0, L^*_k\ge 0$ 是常数，假定

H_0）$\left\{\varphi_1\cdot\left(Nk_0T^2+Lh_0T^2+\sum_{k=1}^m L_k^*\right)+\varphi_2\cdot\sum_{k=1}^m L_k,\ \varphi_2\cdot\left(Nk_0T^2+Lh_0T^2+\sum_{k=1}^m L_k^*\right)+M\varphi_1\sum_{k=1}^m L_k\right\}<1$；

其中：
$$\varphi_1=\frac{\max\{1,\lambda_2\}\left(\mathrm{e}^{\theta T}+1\right)}{\theta(1+\lambda_2)\left[\mathrm{e}^{\theta T}(1+\theta\lambda_1)-(1-\theta\lambda_1)\right]}+\frac{2\lambda_1\mathrm{e}^{\theta T}}{\left(\mathrm{e}^{\theta T}-1\right)^2+\theta\lambda_1\left(\mathrm{e}^{2\theta T}-1\right)}；$$

$$\varphi_2=\frac{\max\{1,\lambda_2\}\left(\mathrm{e}^{\theta T}-1\right)}{(1+\lambda_2)\left[\mathrm{e}^{\theta T}(1+\theta\lambda_1)-(1-\theta\lambda_1)\right]}-\frac{|1-\lambda_2|}{C}。$$

则脉冲积分方程（5）在 $PC^1[J,\mathbb{R}]$ 中具有唯一解。

引理 3 （比较定理）设 $u\in E$ 满足：

$$\begin{cases}-p''(t)\le -Mp(t)-N(Kp)(t)-L(Sp)(t),\\ \quad t\in J=[0,T], t\ne t_k;\\ \Delta p(t_k)\le L_kp'(t_k), \Delta p'(t_k)\ge L_k^*p(t_k),\\ \quad k=1,2,\cdots,m;\\ p(0)=p(T)+\lambda_1\left[p'(0)+p'(T)\right];\\ p'(0)\ge\lambda_2p'(T)。\end{cases}\quad(6)$$

其中：$M>0, L\ge 0, N\ge 0$ 和 $L_k\ge 0, L^*_k\ge 0$ 是常数。

假定 $\left[\sum_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)\left(M+k_0NT+h_0LT\right)\right]\cdot$

$$(1+1/\lambda_2)\left(\lambda_1+\sum_{k=1}^m L_k+\tau(m+1)\right)\le 1,\quad(7)$$

则 $p(t)\le 0,\ \forall t\in J$。

证明 假设 $p(t)\le 0,\ \forall t\in J$ 不成立，则有2种情形。

情形 Ⅰ 存在 $\bar{t}\in J$ 使 $p(\bar{t})>0$，并且 $p(t)\ge 0, \forall t\in J$。

由式（6）有 $p''(t)\ge 0, t\ne t_k, t\in J$；

$\Delta p'(t_k)\ge L_k^*p(t_k)\ge 0$（$k=1,\cdots,m$）。

故 $p'(t)$ 在 J 上是不递减的。若 $p'(t)<0, \forall t\in J$，则 $\Delta p(t_k)\le L_kp'(t_k)<0$。这样 $p(t)$ 在 J 上是严格递减的，这与 $p(0)=p(T)+\lambda_1\left[p'(0)+p'(T)\right]$ 矛盾。因此，存在 $t_1^*\in J$ 使 $p'(t_1^*)\ge 0$。

若 $p'(t_1^*)=0$，则有以下3种可能情形：

ⅰ）若 $t_1^*=0$ 则 $p'(t)\ge 0, t\in J$。由 $p'(0)\ge\lambda_2p'(T)$ 有 $p'(T)\le 0$，则 $p'(T)=0$ 且 $0=p'(T)\ge p'(t)\ge 0$，从而 $p'(t)=0, \forall t\in J$。不妨设 $p(t)=c_i\ge 0, \forall J_i$（$i=0,1,\cdots,m$），其中 c_i 是常数。显然，存在 $t_1^{**}\in J$ 使 $p(t_1^{**})>0$；可以找到一个 J_l 使 $p(t)=c_l>0,\ \forall t\in J_l$。因此

$0=-p''(t)\le -Mp(t)=-Mc_l<0, \forall t\in(t_{l-1},t_l)$，矛盾。

ⅱ）若 $t_1^*=T$，则 $p'(t)\le 0, t\in J$。由 $\lambda_2p'(T)\le p'(0)$，有 $p'(0)\ge 0$，则 $p'(0)=0$ 且 $0=p'(0)\le p'(t)\le 0$，从而 $p'(t)=0,\ \forall t\in J$。余下证明与情形ⅰ）相同。

ⅲ）若 $t_1^*\in(0,T)$，则 $p'(t)\le 0, t<t_1^*$，且

$p'(t)\ge 0,\ t>t_1^*$。由$p'(t)$在J上不减，有：

$$0\le\lambda_2 p'(T)\le p'(0)\le p'(t)\le p'(T)\le p'(0)/\lambda_2\le 0。$$

从而$p'(t)=0, t\in J$。余下证明与情形 i ）相同。

因此$p'(t_1^*)>0$。此时又有以下3种可能情形：

i ）若$t^*_1=0$，则$p'(0)>0$。由$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{p(t)-p(0)}{t}>0$，$p(0)=p(T)+\lambda_1\left[p'(0)+p'(T)\right]>0$得，存在$\eta\in J_j$，$0\le j\le m$，使$p(\eta)=\max\limits_{t\in J}p(t)>0$。

若$\eta\in(t_j,t_{j+1})$，则$p'(t)\le p'(\eta)=0,\ \forall t\in[0,\eta]$，显然同$p'(0)>0$矛盾。

若$\eta=t_{j+1}$，由$p'(\eta^-)=\lim\limits_{t\to\eta^-}\dfrac{p(t)-p(\eta)}{t-\eta}\ge 0$和$p'(\eta^+)=\lim\limits_{t\to\eta^+}\dfrac{p(t)-p(\eta)}{t-\eta}\le 0$有：

$$0\le L_k^*\left(p(\eta)\right)\le\Delta p'(\eta)=p'(\eta^+)-p'(\eta^-)<0。$$

矛盾。

ii ）若$t_1^*=T$，则$p'(T)>0$。由$\lambda_2 p'(T)\le p'(0)$，有$p'(0)\ge 0$。余下证明与情形 i ）相同。

iii ）若$t_1^*\in(0,T)$，则$p'(0)<p'(t_1^*)<p'(T)$，故$p'(T)>0$。余下证明与情形 i ）相同。

情形Ⅱ 存在$t^*,t_*\in J$使$p(t^*)>0,\ p(t_*)<0$。

令$\inf\{p(t):t\in J\}=-\varepsilon$，则$\varepsilon>0$，且存在$t_{**}\in J_j, 0\le i\le m$使$p(t_{**})=-\varepsilon$或$p(t_j^+)=-\varepsilon$以及

$$-p''(t)\le -Mp(t)-N(Kp)(t)-L(Sp)(t)\le (M+k_0NT+h_0LT)\varepsilon=M_0\varepsilon,$$

$$\Delta p'(t_k)\ge L_k^*p(t_k)\ge -\varepsilon L_k^*,$$

其中$M_0=M+k_0NT+h_0LT$。

不妨设$p(t_{**})=-\varepsilon$（当$p(t_j^+)=-\varepsilon$时，证明类似）。

若$p'(t)<0,\forall t\in J$，则$\Delta p(t_k)\le L_k p'(t_k)<0$（$k=1,\cdots,m$），这样$p(t)$在$J$上是严格减的，但$p(0)=p(T)+\lambda_1\left[p'(0)+p'(T)\right]$，矛盾。故存在$\bar t\in J$使$p'(\bar t)\ge 0$。

令$\bar t\in J_l, l\in\{0,1,\cdots,m\}$，由中值定理有：

$$p'(t_l^-)-p'(\bar t)-\varepsilon L_l^*\le p'(t_l^+)-p'(\bar t)=-p''(\xi_l^*)(\bar t-t_l^+)\le\tau\varepsilon M_0,\quad \xi_l^*\in(t_l,\bar t);$$

$$p'(t_{l-1}^-)-p'(t_l)-\varepsilon L_{l-1}^*\le p'(t_{l-1}^+)-p'(t_l)=-p''(\xi_{l-1}^*)(t_l-t_{l-1}^+)\le\tau\varepsilon M_0,\quad \xi_{l-1}^*\in(t_{l-1},t_l);$$

$$\vdots$$

$$p'(0)-p'(t_1)\le -p''(\xi_0^*)t_1\le\tau\varepsilon(M+k_0NT+h_0LT),\quad \xi_0^*\in(0,t_1)。$$

由此可知：

$$p'(0)\le p'(\bar t)+\varepsilon\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]\le \varepsilon\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]。\tag{8}$$

类似式（8），有：

$$p'(t)\le p'(T)+\varepsilon\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]\le (1+1/\lambda_2)\varepsilon\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]。$$

设$t^*\in J_j$对某个j，若$t_{**}<t^*$，则$j\ge i$，从而：

$$p(t^*)-p(t_j)\le p(t^*)-p(t_j^+)+L_jp'(t_j)\le (1+1/\lambda_2)(\tau+L_j)\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\varepsilon(m+1)M_0\right];$$

$$p(t_j)-p(t_{j-1})\le p(t_j)-p(t_{j-1}^+)+L_{j-1}p'(t_{j-1})\le (1+1/\lambda_2)(\tau+L_j)\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\varepsilon(m+1)M_0\right];$$

$$\vdots$$

$$p(t_{i+1})-p(t_{**})\le(1+1/\lambda_2)\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\varepsilon(m+1)M_0\right]。$$

故$p(t^*)\le -\varepsilon+(1+1/\lambda_2)\varepsilon\cdot$

$$\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k+\tau(m+1)\right]\le 0。$$

这与$p(t^*)>0$矛盾。

若$t_{**}>t^*$则$j\le i$。同样由中值定理得：

$$p(T)\le p(t_{**})+(1+1/\lambda_2)\varepsilon\cdot\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]\left[\sum\nolimits_{k=i+1}^m L_k+\tau(m-i+1)\right],$$

$$p(t^*)\le p(0)+(1+1/\lambda_2)\varepsilon\cdot\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]\left(\sum\nolimits_{k=2}^i L_k+\tau i\right)。$$

由以上2个不等式、边值条件（2）以及（5），有：

$$p(t^*)\le -\varepsilon+(1+1/\lambda_2)\varepsilon\cdot\left[\sum\nolimits_{k=1}^m L_k^*+\tau(m+1)M_0\right]\left[\lambda_1+\sum\nolimits_{k=1}^m L_k+\tau(m+1)\right]\le 0。$$

这与$p(t^*)>0$矛盾。

对$t_*>t_{**}$的情形，与上面的证明类似。引理3证毕。

引理4 假设$u\in E$满足

$$\begin{cases}-p''(t)\le -Mp(t)-N(Kp)(t)-L(Sp)(t)-\\ \quad\dfrac{[M+k_0Nt+h_0LT]T}{2\lambda_2}[\lambda_2 p'(T)-p'(0)],\\ \qquad t\in J=[0,T],t\ne t_k;\\ \Delta p(t_k)\le L_k p'(t_k)-\dfrac{L_k}{\lambda_2}[\lambda_2 p'(T)-p'(0)];\\ \Delta p'(t_k)\ge L_k^* p(t_k)+\\ \quad\dfrac{L_k^*\min[t_k,T-t_k]}{\lambda_2}[\lambda_2 p'(T)-p'(0)],\\ \qquad k=1,2,\cdots,m;\\ p(0)=p(T)+\lambda_1[p'(0)+p'(T)];\\ p'(0)<\lambda_2 p'(T)。\end{cases} \tag{9}$$

其中: $M>0, L\ge 0, N\ge 0, L_k\ge 0, L^*{}_k\ge 0, \lambda_1\ge 0, \lambda_2>0$ 且满足式（7）。则 $p(t)\le 0,\ t\in J$。

3　主要结果

当 $\alpha_0(t)\le\beta_0(t),t\in J$，则记 $\alpha_0\le\beta_0$。令 $[\alpha_0,\beta_0]=\{u\in E:\alpha_0(t)\le u(t)\le\beta_0(t),t\in J\}$。

定理1　若 H_0)，式（7）和以下条件成立

H_1）函数 α_0 和 β_0 分别是问题（3）的上下解。

H_2）$f\in C[J\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}]$ 满足：

$$f(t,u,v,w)-f(t,\bar u,\bar v,\bar w)\ge -M(u-\bar u)-N(v-\bar v)-L(w-\bar w),$$

$\forall t\in J,\ \alpha_0(t)\le\bar u\le u\le\beta_0(t)$,

$K\alpha_0(t)\le\bar v\le v\le K\beta_0(t)$,

$S\alpha_0(t)\le\bar w\le w\le S\beta_0(t)$。

H_3）I_k,I_k^* 满足：

$$I_k(u(t_k))-I_k(v(t_k))\le L_k(u'(t_k)-v'(t_k)),$$

$$I_k^*(u(t_k))-I_k^*(v(t_k))\ge L_k^*(u(t_k)-v(t_k))。$$

其中：$\alpha_0(t_k)\le v(t_k)\le u(t_k)\le\beta_0(t_k),k=1,\cdots,m$。则存在单调序列 $\{\alpha_n(t)\}$，$\{\beta_n(t)\}\subset E$，它们分别在 J 上一致收敛于周期边值问题（3）在 $[\alpha_0,\beta_0]$ 中的最小解和最大解。

证明　任给 $\eta\in[\alpha_0,\beta_0]$，令

$$\sigma(t)=f(t,\eta(t),K\eta(t),S\eta(t))+M\eta(t)+N\int_0^t k(t,s)\eta(s)\mathrm{d}s+L\int_0^T h(t,s)\eta(s)\mathrm{d}s。$$

根据引理2和式（4），周期边值问题（3）有唯一解 $u\in E$。

令 $u(t)=A\eta(t)$，则 A 是映 $[\alpha_0,\beta_0]$ 入 $PC[J,\mathbb{R}]$，并具有如下性质：

a）$\alpha_0\le A\alpha_0, A\beta_0\le\beta_0$；

b）$A\eta_1\le A\eta_2$，对任意 $\alpha_0\le\eta_1\le\eta_2\le\beta_0$。

先证 a)。

记 $p=\alpha_0-\alpha_1$，其中 $\alpha_1=A\alpha_0$。则

$$-p''(t)\le f(t,\alpha_0(t),K\alpha_0(t),S\alpha_0(t))-a(t)-f(t,\alpha_0(t),K\alpha_0(t),S\alpha_0(t))+M(\alpha_1(t)-\alpha_0(t))+N\int_0^t k(t,s)(\alpha_1(s)-\alpha_0(s))\mathrm{d}s+L\int_0^T h(t,s)(\alpha_1(s)-\alpha_0(s))\mathrm{d}s=-Mp(t)-N(Kp(t))-L(S(p(t))-a_p(t),$$

$t\ne t_k,t\in J$；

$$\Delta p(t_k)\le I_k(\alpha_0(t_k))-L_k\alpha_1'(t_k)-I_k(\alpha_0(t_k))+L_k\alpha_0'(t_k)+m_k=L_k p'(t_k)+m_{pk},$$

$$\Delta p'(t_k)\ge I_k^*(\alpha_0(t_k))-L_k^*\alpha_1(t_k)-I_k^*(\alpha_0(t_k))+L_k^*\alpha_0(t_k)+l_k=L_k^* p(t_k)+l_{pk},$$

$$p(0)=\alpha_0(0)-\alpha_1(0)=p(T)+\lambda_1[p'(0)+p'(T)],$$

$k=1,\cdots,m$。

其中：

$$a_p(t)=\begin{cases}0,\quad p'(0)\ge\lambda_2 p'(T)+\delta_2;\\ \dfrac{[M+k_0Nt+h_0LT]T}{2\lambda_2}[\lambda_2 p'(T)+\delta_2-p'(0)],\\ \quad p'(0)<\lambda_2 p'(T)+\delta_2;\end{cases}$$

$$m_{pk}=\begin{cases}0,\quad p'(0)\ge\lambda_2 p'(T)+\delta_2;\\ -\dfrac{L_k}{\lambda_2}[\lambda_2 p'(T)+\delta_2-p'(0)],\\ \quad p'(0)<\lambda_2 p'(T)+\delta_2;\end{cases}$$

$$l_{pk}=\begin{cases}0,\quad p'(0)\ge\lambda_2 p'(T)+\delta_2;\\ \dfrac{L_k^*\min[t_k,T-t_k]}{\lambda_2}[\lambda_2 p'(T)+\delta_2-p'(0)],\\ \quad p'(0)<\lambda_2 p'(T)+\delta_2。\end{cases}$$

根据引理3和引理4，有 $p(t)\le 0$，从而 $\alpha_0\le A\alpha_0$。类似地，有 $A\beta_0\le\beta_0$。

再证 b)。

设 $p(t)=u_1-u_2$，其中 $u_1=A\eta_1$，$u_2=A\eta_2$，对 $\alpha_0\le\eta_1\le\eta_2\le\beta_0$，由 H_1), H_2）有

$$-p''(t)+Mp(t)+N\int_0^t k(t,s)p(s)\mathrm{d}s+L\int_0^T h(t,s)p(s)\mathrm{d}s\le 0,$$

$t\ne t_k,t\in J$。

容易证明：

$\Delta p(t_k)\le L_k p'(t_k)$，$\Delta p'(t_k)\ge L_k^* p(t_k)$，$k=1,\cdots,m$；

（下转第101页）