第24卷第3期
2010年5月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.3
May 2010

最小奇异值灵敏度分析法的研究

赵瑞峰

（铁煤集团物资供应分公司，辽宁 调兵山 112700）

摘 要：在静态电压稳定分析中，最小奇异值灵敏度可以用于薄弱节点的分析及无功补偿点的确定。考虑了发电机节点的参与作用，将得到的最小奇异值的左右奇异值向量用于最小奇异值灵敏度的计算，通过IEEE39节点系统验证表明，这种方法可以更准确地进行薄弱节点的排序。

关键词：静态电压稳定；最小奇异值；灵敏度；薄弱节点排序

中图分类号：TM712　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)03-0070-03

Study on Sensitivity Analysis of Minimum Singular Value

Zhao Ruifeng

（Supplies Branch of Tiefa Coal Industry Group Corporation，Diaobingshan Liaoning 112700，China）

Abstract：In static voltage stability analysis, minimum singular value is used in the analysis of weak buses and the determination of reactive power compensation point. Considering the participation effect of generator nodes, applies the right and left singular value vectors of minimum singular value to the computation of its sensitivity. IEEE39-bus system verifies the method can rank weak buses exactly.

Keywords：static voltage stability; minimum singular value; sensitivity; weak buses ranking

奇异值分析法，是一种根据系统雅可比矩阵的最小奇异值和对应的奇异向量来判断电压静态稳定裕度和薄弱点的方法。很多学者将其应用于IEEE5节点、IEEE32节点等标准系统以及实际电网稳定性的研究。文献[1]和文献[2]分别对四川电网和江苏电网的稳定性作了分析；文献[3]给出了最小奇异值对系统参数灵敏度的计算方法，并将最小奇异值灵敏度用于薄弱节点的分析及无功补偿点的确定。结果表明，利用最小奇异值灵敏度能正确地确定弱稳定区域，在最小奇异值灵敏度最大的节点进行无功补偿可获得更好的补偿效果。本文对奇异值分析法进行改进，考虑了发电机节点的参与作用，并通过IEEE39节点系统进行验证。

1 奇异值分析法原理

奇异值分析法将潮流方程的雅可比矩阵进行奇异值分解，其中最小奇异值 δ_{min} 是衡量系统电压静态稳定裕度的状态指标。当系统运行工作点向电压静态稳定临界点趋近时，δ_{min} 趋向于0；当系统运行工作点到达极限工作点时，$\delta_{min}=0$，表示临界稳定，对应于雅可比矩阵奇异。而最小奇异值对应的奇异向量则反映了系统各节点参与失稳的模式。如上所述，研究给定系统运行点电压静态稳定裕度的问题，就可转化为研究确定相应的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 接近奇异的程度问题。

对雅可比矩阵进行奇异值分解[4]，记为：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^{2n-m}\boldsymbol{V}_i\delta_i\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}},$$

式中：$\boldsymbol{J}$ 为潮流方程雅可比矩阵；$\boldsymbol{V}_i$，$\boldsymbol{U}_i$ 为奇异值向量，分别是规格化矩阵 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的第 i 列；$\boldsymbol{\Sigma}$ 是正的实奇异值 δ_i 的对角矩阵；$\delta_1\geq\delta_2\geq\cdots\geq\delta_{2n-m}$；$n$ 为PV和PQ节点数之和，m 为PQ节点数。

收稿日期：2009-12-31

通信作者：赵瑞峰（1968-），男，辽宁辽中人，铁煤集团物资供应分公司工程师，主要研究方向为电力系统及其自动化，
E-mail：zhaoruifeng@tfcoal.com

如果 $\boldsymbol{J}$ 非奇异，则有功和无功注入的微小变化对 $[\Delta\boldsymbol{\theta},\Delta\boldsymbol{U}]^{\mathrm{T}}$ 的影响可以写为：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}\\ \Delta\boldsymbol{U}\end{bmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{P}\\ \Delta\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}=\sum\delta_i^{-1}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{P}\\ \Delta\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}。$$

当一个奇异值几乎为0时，系统接近于电压崩溃点，系统响应完全由最小奇异值 δ_{2n-m} 和它对应的奇异值向量 $\boldsymbol{V}_{2n-m}$ 和 $\boldsymbol{U}_{2n-m}$ 所决定。因此

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}\\ \Delta\boldsymbol{U}\end{bmatrix}=\delta_{2n-m}^{-1}\boldsymbol{U}_{2n-m}\boldsymbol{V}_{2n-m}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{P}\\ \Delta\boldsymbol{Q}\end{bmatrix},$$

式中：$\boldsymbol{U}_{2n-m}=[\theta_1,\cdots,\theta_n,U_1,\cdots,U_{n-m}]^{\mathrm{T}}$，$\theta_i$ 为各节点电压相角，U_i 为各节点电压幅值；

$\boldsymbol{V}_{2n-m}=[P_1,\cdots,P_n,Q_1,\cdots,Q_{n-m}]^{\mathrm{T}}$，$P_i$ 为各节点有功功率，Q_i 为各节点无功功率。

这里 $\boldsymbol{U}_{2n-m}$ 和 $\boldsymbol{V}_{2n-m}$ 规格化为：

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2+\sum_{i=1}^{n-m}U_i^2=1,\ \sum_{i=1}^{n}P_i^2+\sum_{i=1}^{n-m}Q_i^2=1。$$

令 $\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{P}\\ \Delta\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_{2n-m}$，（1）

则 $\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}\\ \Delta\boldsymbol{U}\end{bmatrix}=\dfrac{\boldsymbol{U}_{2n-m}}{\delta_{2n-m}}$。（2）

由式（1）和式（2）可知，当最小奇异值充分小时，功率注入小的变化可引起电压大的变化。

对左、右奇异值向量 $\boldsymbol{V}_{2n-m}$ 和 $\boldsymbol{U}_{2n-m}$ 说明如下[4]：

1）$\boldsymbol{U}_{2n-m}$ 最大的表列值指示最灵敏的节点电压（临界电压），弱节点可以通过右奇异值向量来识别。

2）$\boldsymbol{V}_{2n-m}$ 最大的表列值相当于有功和无功功率注入变化最灵敏的方向，最危险的负荷和发电量的变化模式可以从左奇异值向量获得。

3）$\boldsymbol{V}_{2n-m}$ 提供了节点处功率注入变化的典型模式。

4）$\boldsymbol{U}_{2n-m}$ 提供了节点电压和角度改变的典型模式。

5）左奇异向量还可以提供不同运行区域的传输功率（界面功率）对电压稳定性的影响，借助左奇异向量分析可以选择出弱传输线。

2　最小奇异值灵敏度法[3]

2.1　最小奇异值对状态变量的灵敏度

分析最小奇异值对系统参数灵敏度的影响，有助于人们得到影响系统静态电压稳定的信息，判别出最薄弱节点，并采取相应措施来提高系统稳定性，包括进行无功补偿、切负荷等措施。在潮流方程中，采用极坐标系时，一般取PQ节点电压幅值 U_1，及相角 θ_1，PV节点电压相角 θ_{g} 为状态变量。设 x_i 为上述的状态变量，则最小奇异值对状态变量 x_i 的灵敏度为：

$$\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial x_i}=\frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial x_i}\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}}\ (i=1,2,\cdots,2n-r-2),\tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{U}$ 表示 $\delta_{\min}$ 对应的左、右奇异值向量；r 为PV节点数；第 n 号节点为平衡节点；$\partial\boldsymbol{J}/\partial x_i$ 为雅可比矩阵对状态变量 x_i 的偏导数，它是一个高度稀疏的矩阵。

各非零元素的具体求法见文献[4]。将式（3）写成向量的形式，则有：

$$\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\boldsymbol{X}}=\left[\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\theta_{n-1}},\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial U_1}U_1,\cdots,\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial U_{n-r-1}}U_{n-r-1}\right]^{\mathrm{T}},$$

式中：$\boldsymbol{X}$ 为状态变量列向量。

2.2　最小奇异值对控制变量的灵敏度

在电力系统中，PV节点的电压和有功功率、PQ节点的有功和无功功率为控制变量。主要考虑负荷节点功率的变化对最小奇异值的灵敏度，假定PV节点的电压幅值保持不变。

令 $\boldsymbol{Y}=[P_1,P_2,\cdots,P_{n-1},Q_1,Q_2,\cdots,Q_{n-r-1}]^{\mathrm{T}}$，由隐函数求偏导数的方法可得：

$$\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{2n-r-2}\left(\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)(i=1,2,\cdots,2n-r-2),\tag{4}$$

式中：y_j 为向量 $\boldsymbol{Y}$ 中的各元素；$\partial y_j/\partial x_i$ 即为雅可比矩阵元素 J_{ji}；右边表达式为 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 列的各元素与各自所在行数 j 对应的 $\partial\delta_{\min}/\partial y_j$ 乘积累加而得，将式（4）改写成矩阵形式，则有：

$$\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\boldsymbol{Y}}。\tag{5}$$

式中：$\dfrac{\partial\delta_{\min}}{\partial\boldsymbol{Y}}=\left[\dfrac{\partial\delta_{\min}}{\partial y_1},\dfrac{\partial\delta_{\min}}{\partial y_2},\cdots,\dfrac{\partial\delta_{\min}}{\partial y_{2n-r-2}}\right]^{\mathrm{T}}$。

当雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 非奇异时，式（5）两边同时左乘矩阵 $(\boldsymbol{J}^{-1})^{\mathrm{T}}$，则可得 $\delta_{\min}$ 对控制变量的灵敏度为：

$$\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\boldsymbol{Y}}=(\boldsymbol{J}^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\delta_{\min}}{\partial\boldsymbol{X}}。$$

3　考虑发电机节点无功的最小奇异值灵敏度法

文献[6]在传统的模态分析雅可比矩阵中增加了发电机无功和发电机电压部分，有：

$$\begin{bmatrix}\Delta P_L\\ \Delta Q_L\\ \Delta P_G\\ \Delta Q_G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{P_L\theta_L} & J_{P_LV_L} & J_{P_L\theta_G} & J_{P_LV_G}\\ J_{Q_L\theta_L} & J_{Q_LV_L} & J_{Q_L\theta_G} & J_{Q_LV_G}\\ J_{P_G\theta_L} & J_{P_GV_L} & J_{P_G\theta_G} & J_{P_GV_G}\\ J_{Q_G\theta_L} & J_{Q_GV_L} & J_{Q_G\theta_G} & J_{Q_GV_G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta_L\\ \Delta V_L\\ \Delta\theta_G\\ \Delta V_G\end{bmatrix}。$$

由于PV节点的电压恒定，可以令 $\Delta V_G=0$，所以有

功和无功部分对发电机节点电压的偏导为0，则

$$\begin{bmatrix}\Delta P_L\\ \Delta Q_L\\ \Delta P_G\\ \Delta Q_G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{P_L\theta_L} & J_{P_LV_L} & J_{P_L\theta_G} & 0\\ J_{Q_L\theta_L} & J_{Q_LV_L} & J_{Q_L\theta_G} & 0\\ J_{P_G\theta_L} & J_{P_GV_L} & J_{P_G\theta_G} & 0\\ J_{Q_G\theta_L} & J_{Q_GV_L} & J_{Q_G\theta_G} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\theta_L\\ \Delta V_L\\ \Delta\theta_G\\ 0\end{bmatrix},$$

$$J=\begin{bmatrix}J_{P_L\theta_L} & J_{P_LV_L} & J_{P_L\theta_G} & 0\\ J_{Q_L\theta_L} & J_{Q_LV_L} & J_{Q_L\theta_G} & 0\\ J_{P_G\theta_L} & J_{P_GV_L} & J_{P_G\theta_G} & 0\\ J_{Q_G\theta_L} & J_{Q_GV_L} & J_{Q_G\theta_G} & 0\end{bmatrix}。\qquad(6)$$

考虑到发电机节点无功的参与作用，对式（6）进行奇异值分解，最小奇异值为除去r个0值后的剩余奇异值中的最小值，并得到此最小奇异值对应的左右奇异值向量，用最小奇异值和左右奇异值向量进行电压稳定分析，可以得到较准确的结果。

以IEEE39节点系统的最小奇异值对电压幅值状态变量U的灵敏度（灵敏度值经规格化处理）来判别薄弱节点为例，进行验证。

将IEEE39节点系统的节点32的发电机输出功率及节点28的负荷功率增加2.6倍，其余节点的负荷功率保持不变，计算得到灵敏度值。正确薄弱节点排序则通过在各个节点安装SVC后计算系统的最小特征值来实现[5]。

传统奇异值分析法和改进后奇异值分析法的结果比较见表1。

表1　薄弱节点排序结果比较

Table 1　The comparison of weak node ranking results

奇异值分析法		改进的奇异值分析法		薄弱节点排序
节点号	灵敏度值	节点号	灵敏度值	
16	1	6	1	6
6	0.832 2	5	0.868 2	5
5	0.746 7	7	0.658 7	7
17	0.713 6	8	0.600 4	8
10	0.566 3	11	0.563 7	11
18	0.483 1	13	0.496 0	10
8	0.456 8	14	0.246 6	13
7	0.454 4	4	0.231 4	12
13	0.438 5	10	0.193 2	4
11	0.429 0	12	0.134 7	14

通过比较发现改进方法得到的灵敏度进行薄弱节点排序更为接近正确结果。

4　结语

对奇异值分析法进行改进，考虑了多项式负荷模型和发电机节点无功的参与作用，并采用IEEE39节点算例，对考虑发电机节点无功参与作用的方法进行验证，与原方法作比较，证明了改进方法的准确性。

参考文献：

[1] 吴国梁，刘俊勇，陈　谦. 奇异值分析法对四川电网电压静态静稳极限的分析预测[J]. 四川电力技术，2005(1)：1-4.
Wu Guoliang，Liu Junyong，Chen Qian. Application of Singular Value Decomposition Method to Analysis and Prediction for Voltage Steady-State Stability Limit of Sichuan Power Grid[J]. Sichuan Electric Power Technology，2005(1)：1-4.

[2] 李　钦，孙宏斌，赵晋泉，等. 静态电压稳定分析模块在江苏电网的在线应用[J]. 电网技术，2006，30(6)：11-17.
LI Qin，Sun Hongbin，Zhao Jinquan，et al. On-Line Application of Static Voltage Stability Analysis Module in Jiangsu Power System[J]. Power System Technology，2006，30(6)：11-17.

[3] 陈　敏，张步涵，段献忠，等. 基于最小奇异值灵敏度的电压稳定薄弱节点研究[J]. 电网技术，2006，30(24)：36-39.
Chen Min，Zhang Buhan，Duan Xianzhong，et al. Study on Weak Buses of Voltage Stability Based on Sensitivity of Minimum Singular Value[J]. Power System Technology，2006，30(24)：36-39.

[4] 周双喜，朱凌志，郭锡玖，等. 电力系统电压稳定性及其控制[M]. 北京：中国电力出版社，2004：211-220.
Zhou Shuangxi，Zhu Lingzhi, Guo Xijiu, et al. Voltage Stability in Power System and Its Control[M]. Beijing： China Electric Power Press, 2004：211-220.

[5] 张　靖，程时杰，文劲宇，等. 采用正规形方法确定重要负荷节点排序[J]. 高电压技术，2008，34(4)：744-747.
Zhang Jing，Cheng Shijie，Wen Jingyu，et al. Determination of Load Buses Rank by Normal Forms Method[J]. High Voltage Engineering，2008，34(4)：744-747.

[6] 韩　光. 基于改进模态分析技术的电压稳定性研究[D]. 南京：河海大学，2006.
Han Guang. The Study of Voltage Stability Based on Improved Modal Analysis Technique[D]. Nanjing: Hehai University，2006.

（责任编辑：邓光辉）