第24卷第3期
2010年5月

湖　南　工　业　大　学　学　报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.24 No.3
May 2010

不确定Lurie时变时滞系统绝对稳定性

曾红兵[1,2]，肖伸平[1]

（1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412008；
2. 中南大学 信息科学与工程学院，湖南 长沙 410083）

摘　要：基于增广Lyapunov泛函结合自由权矩阵方法，对不确定Lurie时变时滞系统的绝对稳定性问题进行研究，得到了基于线性矩阵不等式（LMI）的具有更低保守性的时滞相关绝对稳定新判据。数值实例表明，该方法优于已有文献的结果。

关键词：Lurie时变时滞系统；绝对稳定；自由权矩阵

中图分类号：TP273　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1673-9833(2010)03-0047-05

Absolute Stability for Uncertain Lurie Systems with Time-Varying Delay

Zeng Hongbing[1,2]，Xiao Shenping[1]

（1. College of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China；
2. College of Information and Engineering，Central South University，Changsha 410083，China）

Abstract： Based on augmented Lyapunov functional and free-weighting matrix approach, the problem of absolute stability of uncertain Lurie systems with time-varying delay is investigated. Some less conservative delay-dependent stability criteria are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs). A numerical example shows that the proposed method is superior to the existing results.

Keywords: Lurie systems with time-varying delay; absolute stability; free-weighting matrix

1　背景知识

Lurie控制系统的绝对稳定性问题现已受到了国内外学者的普遍重视和广泛研究，并取得了许多研究成果[1-5]。由于时滞现象大量存在于实际控制系统中，且是导致系统不稳定的一个重要原因，因而近年来Lurie时滞系统的绝对稳定性研究得到了广泛的关注[6-9]。

近年来，科研工作者们提出了一种不需要模型变换及交叉项界定的自由权矩阵方法，并对各类时滞系统进行了研究，得到了一系列具有更低保守性的时滞相关稳定条件[10-11]。如文献[2]结合增广Lyapunov泛函和自由权矩阵的方法，讨论了Lurie定常时滞系统的绝对稳定性问题；文献[10]结合增广Lyapunov泛函和自由权矩阵的方法，对线性时变系统进行了分析；文献[12]利用积分不等式方法，对一类具有时变时滞的Lurie非线性系统的稳定性问题进行了研究，并得到了一些具有较低保守性的结果。但文献[12]的研究者将Lyapunov泛函中的导数项 $\int_{t-r_M}^{t}\dot{x}^{T}(\xi)(r_M R)\dot{x}(\xi)d\xi$ 放大为$-\int_{t-r(t)}^{t}\dot{x}^{T}(\xi)(r_M R)\dot{x}(\xi)d\xi$，而忽略了$-\int_{t-r_M}^{t-r(t)}\dot{x}^{T}(\xi)(r_M R)\dot{x}(\xi)d\xi$这一项，这必将导致结论存在一定的保守性，而文献[13]保留这一积分项，并采用自由权矩阵方法，获得了更低保守性的结论，但文献[13]采用的是普通Lyapunov泛函，其结论仍具有改进的空间。

收稿日期：2009-11-17

通信作者：曾红兵（1979-），男，湖南嘉禾人，湖南工业大学讲师，中南大学博士生，主要从事鲁棒控制理论及应用方面的教学与研究，E-mail：9804zhb@163.com

本文通过构造一种增广Lyapunov泛函，进一步利用自由权矩阵方法，充分考虑时变时滞与时滞上界之间的关系，不忽略任何有用信息，得到了Lurie时变时滞系统基于线性矩阵不等式（LMI）的时滞相关绝对稳定条件。最后，通过数值实例说明了本文所采用的方法的有效性和相比已有研究结果的优越性。

全文沿用以下标记：$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别表示实数域上的 n 维向量空间与 $n\times n$ 矩阵空间，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵和逆矩阵；$\boldsymbol{P}>0(\boldsymbol{P}\ge 0)$表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正定（半正定）的；$*$ 表示矩阵中的对称项。

2 系统描述

考虑如下不确定Lurie时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=\left(A+\Delta A(t)\right)x(t)+\\ \qquad\left(B+\Delta B(t)\right)x\left(t-d(t)\right)+Dw(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx\left(t-d(t)\right),\\ w(t)=-\varphi\left(t,z(t)\right),\\ x(t)=\phi(t),\ \forall t\in[-h,0].\end{cases}\qquad(1)$$

式（1）中：

$x(t)\in\mathbf{R}^n$为系统状态向量；

$w(t)\in\mathbf{R}^m$为系统输入向量；

$z(t)\in\mathbf{R}^m$为系统输出向量；

$\phi(t)$为连续向量值初始函数；

$h>0$，为系统最大时滞；

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{D},\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$ 为合适维数的常数实矩阵；

$\varphi\left(t,z(t)\right):[0,\infty)\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$为对 t 连续的非线性函数，对$z(t)$，满足李普希兹（Lipchitz）条件，$\varphi(t,0)=0$，且对$\forall t\ge 0$、$\forall z(t)\in\mathbf{R}^m$满足以下扇形约束：

$$\left[\varphi\left(t,z(t)\right)-K_1z(t)\right]^{\mathrm{T}}\left[\varphi\left(t,z(t)\right)-K_2z(t)\right]\le 0,\qquad(2)$$

式（2）中，$\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$ 为具有合适维数的常数实矩阵。通常说这样的一个非线性函数$\varphi\left(t,z(t)\right)$属于扇形区域$[\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2]$，时滞$d(t)$是满足式（3）条件的时变连续函数，

$$0<d(t)<h,\quad \left|\dot{d}(t)\right|<\mu,\qquad(3)$$

式（3）中：h 和 μ 是常数。其中，时变结构不确定性的形式如下：

$$\left[\Delta A(t)\quad \Delta B(t)\right]=LF(t)\left[E_a\quad E_b\right],\qquad(4)$$

式（4）中：

$\boldsymbol{L},\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{E}_b$ 是具有合适维数的常数矩阵；

$\boldsymbol{F}(t)$是未知的时变实矩阵，且满足

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\le I,\ \forall t。\qquad(5)$$

式（5）中：$\boldsymbol{I}$ 表示合适维数的单位矩阵。

为处理系统的不确定性，需用到如下引理1。

引理1[14] 给定适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{E}$，则 $Q+HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}<0$，对任意满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\le I$的$F(t)$成立的充要条件是存在$\lambda>0$，使得：$Q+\lambda^{-1}H^{\mathrm{T}}H+\lambda E^{\mathrm{T}}E<0$。

3 主要结果

首先考虑如下标称系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx\left(t-d(t)\right)+Dw(t),\\ z(t)=Mx(t)+Nx\left(t-d(t)\right),\\ w(t)=-\varphi\left(t,z(t)\right),\\ x(t)=\phi(t),\ \forall t\in[-h,0].\end{cases}\qquad(6)$$

且非线性函数$\varphi\left(t,z(t)\right)$属于扇形区域$[\boldsymbol{0},\boldsymbol{K}]$的情形，即$\varphi\left(t,z(t)\right)$满足

$$\varphi\left(t,z(t)\right)^{\mathrm{T}}\left[\varphi\left(t,z(t)\right)-Kz(t)\right]\le 0,\qquad(7)$$

利用自由权矩阵方法，有如下定理1。

定理1 给定标量 $h>0$ 和$0\le\mu<1$，存在矩阵

$$P_d=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\ *&P_{22}&P_{23}\\ *&*&P_{33}\end{bmatrix}>0,\quad Q_d=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\ *&Q_{22}\end{bmatrix}\ge 0,$$

$$R_d=\begin{bmatrix}R_{11}&R_{12}\\ *&R_{22}\end{bmatrix}>0,\ Z=Z^{\mathrm{T}}>0,$$

$$U=U^{\mathrm{T}}>0,\quad X=X^{\mathrm{T}}\ge 0,$$

以及任意合适维数的矩阵 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{T}$，使得如下LMIs成立，

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Phi&\mu P_2^{\mathrm{T}}\\ *&-\mu U\end{bmatrix}<0,\qquad(8)$$

$$\Psi_1=\begin{bmatrix}X&G\\ *&Z\end{bmatrix}\ge 0,\qquad(9)$$

$$\Psi_2=\begin{bmatrix}X&H\\ *&Z\end{bmatrix}\ge 0,\qquad(10)$$

则满足时滞约束（3）的标称系统（6）在扇形区域$[\boldsymbol{0},\boldsymbol{K}]$内绝对稳定。其中，

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_2^{\mathrm{T}}+T\Phi_3+\Phi_3^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}+hX,$$

$$\Phi_1=\begin{bmatrix}\Phi_{11}&0&0&\Phi_{14}&P_{12}&P_{13}&\Phi_{17}\\ *&\Phi_{22}&0&P_{12}^{\mathrm{T}}&\Phi_{25}&P_{23}&\Phi_{27}\\ *&*&-R_{11}&P_{13}^{\mathrm{T}}&P_{23}^{\mathrm{T}}&\Phi_{36}&0\\ *&*&*&\Phi_{44}&0&0&0\\ *&*&*&*&\Phi_{55}&0&0\\ *&*&*&*&*&-R_{22}&0\\ *&*&*&*&*&*&-2I\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\Phi}_{11} = \boldsymbol{Q}_{11} + \boldsymbol{R}_{11}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{14} = \boldsymbol{P}_{11} + \boldsymbol{Q}_{12} + \boldsymbol{R}_{12}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{17} = -\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{22} = -(1-\mu)\boldsymbol{Q}_{11}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{25} = \boldsymbol{P}_{22} - (1-\mu)\boldsymbol{Q}_{12}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{27} = -\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{36} = \boldsymbol{P}_{33} - \boldsymbol{R}_{12}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{44} = h\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Q}_{22} + \boldsymbol{R}_{22}$,

$\boldsymbol{\Phi}_{55} = \mu\boldsymbol{U} - (1-\mu)\boldsymbol{Q}_{22}$,

$\boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & -\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H} & -\boldsymbol{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_6^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{T}_7^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} & 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{D} \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_6^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_7^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_6^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_7^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_{22} & \boldsymbol{P}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

证明　由牛顿－莱布尼茨公式，对于任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$，有以下式子成立：

$$2\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{G}\left[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right]=0, \tag{11}$$

$$2\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\left[\boldsymbol{x}(t-d(t))-\boldsymbol{x}(t-h)-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\right]=0。 \tag{12}$$

根据式（1）和（7），有

$$-2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)-2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}\left[\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t-d(t))\right]\ge 0。 \tag{13}$$

对任意合适维数的矩阵$\boldsymbol{T}, \boldsymbol{X}\ge 0$有下式成立：

$$h\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\zeta}_1(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\zeta}_1(t)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t-d(t)}\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{\zeta}_1(t)\mathrm{d}s=0, \tag{14}$$

$$2\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} & 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 & -\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}_1(t)=0, \tag{15}$$

这里定义向量

$\boldsymbol{\eta}(t):=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t)) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\zeta}_1(t):=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-d(t)) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h) & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\zeta}_2(t,s):=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

构造如下Lyapunov-Krasovskii泛函：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(t,x_t)=&\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_a\boldsymbol{\xi}_1(s)+\\&\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{\xi}_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{\xi}_2(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{-h}^{0}\int_{t-\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{16}$$

式（16）中：

$\boldsymbol{\xi}_1(t):=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t)) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\xi}_2(t):=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{P}_a, \boldsymbol{Q}_a, \boldsymbol{R}_a, \boldsymbol{Z}$为待定矩阵，且

$\boldsymbol{P}_a=\boldsymbol{P}_a^{\mathrm{T}}>0$,

$\boldsymbol{Q}_a=\boldsymbol{Q}_a^{\mathrm{T}}\ge 0$,

$\boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}_a^{\mathrm{T}}>0$,

$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}>0$。

计算$\boldsymbol{V}(t,x_t)$沿系统（1）的导数，有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t,x_t)=&2\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_a\dot{\boldsymbol{\xi}}_1(t)+\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}_a+\boldsymbol{R}_a)\boldsymbol{\xi}_2(t)-\\&(1-\dot{d}(t))\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{\xi}_2(t-d(t))-\\&\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{R}_a\boldsymbol{\xi}_2(t-h)+h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\\&\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_a\dot{\boldsymbol{\xi}}_1(t)\le\ &2\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_a\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t-d(t))\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t-h)\end{bmatrix}+\\&\mu\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{x}}(t-d(t))+\\&\mu\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{P}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{-1}\bar{\boldsymbol{P}}_2\boldsymbol{\xi}_1(t),\end{aligned} \tag{18}$$

式（18）中：$\bar{\boldsymbol{P}}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_{22} & \boldsymbol{P}_{23}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}>0$。

将式（11）~（15）的左边加入式（17），并将式（18）代入，得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t,x_t)<&\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\zeta}_1(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{\zeta}_2(t,s)\mathrm{d}s-\\&\int_{t-h}^{t-d(t)}\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\zeta}_2(t,s)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{19}$$

若$\boldsymbol{\Xi}<0$，且$\boldsymbol{\Psi}_1\ge 0$, $\boldsymbol{\Psi}_2\ge 0$，那么对于充分小的ε，有

$\dot{\boldsymbol{V}}(t,x_t)<-\varepsilon\|\boldsymbol{x}(t)\|^2$,

这样，标称系统（6）在扇形区域$[0, \boldsymbol{K}]$内绝对稳定。定理证明完毕。

对非线性函数在一般的扇形区域$[\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2]$中的情形，通过应用反馈环的变换，可得系统（6）在扇形区域$[\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2]$内的绝对稳定性，等价于系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}(t)+\\ \qquad(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}(t-d(t))+\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}(t),\\ \boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t-d(t)),\\ \boldsymbol{w}(t)=-\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t)),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ \forall t\in[-h,0]\end{cases} \tag{20}$$

在扇形区域$[0, \boldsymbol{K}_2-\boldsymbol{K}_1]$内的绝对稳定性。因此，由定理1可得定理2。

定理2　给定标量$h>0$和$0\le\mu<1$，存在矩阵

$$\boldsymbol{P}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{13}\\ * & \boldsymbol{P}_{22} & \boldsymbol{P}_{23}\\ * & * & \boldsymbol{P}_{33}\end{bmatrix}>0,\ \boldsymbol{Q}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ * & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\ge 0,$$

$$R_a=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ * & R_{22} \end{bmatrix}>0,\ Z=Z^{\mathrm{T}}>0,$$

$$U=U^{\mathrm{T}}>0,\ X=X^{\mathrm{T}}\geq 0,$$

以及任意合适维数的矩阵G, H和T，使得式（9）、式（10）及式（21）的LMI成立，

$$\Xi=\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \mu P_2^{\mathrm{T}} \\ * & -\mu U \end{bmatrix}<0, \tag{21}$$

则满足时滞约束（3）的标称系统（6）在扇形区域$[K_1, K_2]$内绝对稳定。其中，

$$\bar{\Phi}=\bar{\Phi}_1+\Phi_2+\Phi_2^{\mathrm{T}}+T\bar{\Phi}_3+\bar{\Phi}_3^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}+hX,$$

$$\bar{\Phi}_1=\begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & 0 & \Phi_{14} & P_{12} & P_{15} & \bar{\Phi}_{17} \\ * & \Phi_{22} & 0 & P_{12}^{\mathrm{T}} & \Phi_{25} & P_{23} & \bar{\Phi}_{27} \\ * & * & -R_{11} & P_{13}^{\mathrm{T}} & P_{33}^{\mathrm{T}} & \Phi_{36} & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -R_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -2I \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_{17}=-M^{\mathrm{T}}(K_2-K_1)^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Phi}_{27}=-N^{\mathrm{T}}(K_2-K_1)^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Phi}_3=\begin{bmatrix} -A_1 & -B_1 & 0 & I & 0 & 0 & -D \end{bmatrix},$$

$$A_1=A-DK_1M,$$

$$B_1=B-DK_1N,$$

且$\Phi_{11}, \Phi_{14}, \Phi_{22}, \Phi_{25}, \Phi_{36}, \Phi_{44}, \Phi_{55}, \Phi_2, T, P_2$定义于定理1。

对于具有时变结构不确定性的系统（1），利用$A+LF(t)E_a$和$B+LF(t)E_b$分别替换式（21）中的A和B，应用Schur补[15]及引理1，有如下定理3。

定理3 给定标量$h>0$和$0\leq\mu<1$，存在矩阵

$$P_a=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33} \end{bmatrix}>0,\ Q_a=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ * & Q_{22} \end{bmatrix}\geq 0,$$

$$R_a=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ * & R_{22} \end{bmatrix}>0,\ Z=Z^{\mathrm{T}}>0,$$

$$U=U^{\mathrm{T}}>0,\ X=X^{\mathrm{T}}\geq 0,$$

以及任意合适维数的矩阵G, H, T和标量$\lambda>0$，使得式（9）、式（10）及式（22）的LMIs成立，

$$\hat{\Xi}=\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \mu P_2 & TL & \lambda\hat{E} \\ * & -\mu U & 0 & 0 \\ * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & \lambda I \end{bmatrix}<0, \tag{22}$$

则满足时滞约束（3）的不确定系统（1）在扇形区域$[K_1, K_2]$内鲁棒绝对稳定。其中，

$$\hat{E}=\begin{bmatrix} E_a & E_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

且T, P_2定义于定理1，$\bar{\Phi}$定义于定理2。

注1 注意到上述定理只适用于$\mu<1$的条件，将定理中的$P_{12}, P_{22}, P_{23}, Q_{11}, Q_{12}$设为零，$Q_{12}=\alpha I$（其中$\alpha$为无穷小的正数），可将前面的定理推广到$\mu\geq 1$的情形，为缩短篇幅，这里只给出定理3的推论。

推论1 给定标量$h>0$和μ，存在矩阵

$$P_b=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} \\ * & P_{33} \end{bmatrix}>0,\ R_a=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^{\mathrm{T}} & R_{22} \end{bmatrix}>0,$$

$$Z=Z^{\mathrm{T}}>0,\ X=X^{\mathrm{T}}\geq 0,$$

以及任意合适维数的矩阵G, H, T和标量$\lambda>0$，使得式（23）、式（24）及式（25）的LMIs成立，

$$\tilde{\Xi}=\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_1+\tilde{\Phi}_2+\tilde{\Phi}_2^{\mathrm{T}}+T\tilde{\Phi}_3+\tilde{\Phi}_3^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}+hX & -TL & \lambda\tilde{E} \\ * & -\lambda I & 0 \\ * & * & -\lambda I \end{bmatrix}<0, \tag{23}$$

$$\tilde{\Psi}_1=\begin{bmatrix} X & G \\ * & Z \end{bmatrix}\geq 0, \tag{24}$$

$$\tilde{\Psi}_2=\begin{bmatrix} X & H \\ * & Z \end{bmatrix}\geq 0, \tag{25}$$

则满足时滞约束（3）的不确定系统（1）在扇形区域$[K_1, K_2]$内鲁棒绝对稳定。其中

$$\tilde{\Phi}_1=\begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & P_{11}+P_{13} & P_{13} & \bar{\Phi}_{17} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Phi}_{27} \\ * & * & -R_{11} & P_{13}^{\mathrm{T}} & P_{33}-R_{12} & 0 \\ * & * & * & hZ+R_{22} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & -2I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_3=\begin{bmatrix} -(A-DK_1M) & -(B-DK_1N) & 0 & I & 0 & -D \end{bmatrix},$$

$$\tilde{E}=\begin{bmatrix} E_a & E_b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$T=\begin{bmatrix} T_1^{\mathrm{T}} & T_2^{\mathrm{T}} & T_3^{\mathrm{T}} & T_4^{\mathrm{T}} & T_5^{\mathrm{T}} & T_6^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\Phi}_2=\begin{bmatrix} G & -G+H & -H & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

且$\bar{\Phi}_{17}, \bar{\Phi}_{27}$定义于定理2。

注2 本文采用增广Lyapunov泛函，使其包含更多的时滞相关信息，同时保留了其导数中的$-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s$项，并通过引入自由权矩阵使得$d(t)$, $h-d(t)$和h之间的关系得到了考虑，因此，所得到的稳定条件具有更低的保守性。

4 数值实例

例1 考虑如下时变结构不确定系统：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}=[0.3\quad 0.1],\ \boldsymbol{N}=[0.1\quad 0.2],\ \boldsymbol{K}_1=0.2,$$

$$\boldsymbol{K}_2=0.5,\ \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_a=\boldsymbol{E}_b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

对于不同的μ，根据以往的文献以及本文判据所得到的保证系统（1）绝对稳定的最大允许时滞$h_{\max}$的具体数据见表1。由表1可看出，利用本文方法所得结果要优于以往文献的结果。

表1　最大允许时滞 $h_{\max}$

Table 1　Maximum allowable time-delay bound $h_{\max}$

方法	μ				
	0.00	0.30	0.60	0.90	>1.00
Han[12]	3.305 7	2.078 7	1.419 5	0.922 8	0.763 8
Wu[15]	3.305 7	2.226 2	1.740 9	1.468 2	1.438 3
定理3	3.305 7	2.233 3	1.750 6	1.472 8	–
推论1	–	–	–	–	1.451 9

5　结语

本文探讨了不确定Lurie时变时滞系统的绝对稳定性问题，应用增广Lyapunov泛函结合自由权矩阵方法，得到了该系统具有更低保守性的时滞相关绝对稳定条件，数值实例结果表明了本方法的有效性和相比已有结果的优越性。

参考文献：

[1] Yang C，Zhang Q，Zhou L. Generalized Absolute Stability Analysis and Synthesis for Lur'e-Type Descriptor Systems [J]. IET Control Theory and Application，2007，1(3)：617−623.

[2] 吴　敏，冯智勇，何　勇. 基于增广Lyapunov泛函的Lurie时滞系统绝对稳定性[J]. 自动化学报，2008，34(8)：1003−1007.
Wu Min，Feng Zhiyong，He Yong. Absolute Stability of Lurie Systems with Time-Delay Based on Augmented Lyapunov Functional[J]. Acta Automatica Sinica，2008，34 (8)：1003−1007.

[3] Gao J F，Su H Y，Ji X F，et al. New Delay-Dependent Absolute Stability Criteria for Lurie Control System[J]. Acta Automatica Sinica，2008，34(10)：1275−1280.

[4] Gan Z X，Ge W G. Lyapunov Functional for Multiple Delay General Lur'e Control Systems with Multiple Nonlinearities [J]. Journal of Mathematics Analysis and Applications，2001，259(2)：596−608.

[5] Han Q L. Absolute Stability of Time-Delay Systems with Sector-Bounded Nonlinearity[J]. Automatica，2005，41 (12)：2171−2176.

[6] He Y，Wu M. Absolute Stability for Multiple Delay General Lur'e Control Systems with Multiple Nonlinearities[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2003，159 (2)：241−248.

[7] Fridman E，Shaked U. Delay-Dependent Stability and H_∞ Control: Constant and Time-Varying Delays[J]. Int. J. Control，2003，76 (1)：48−60.

[8] Han Q L，Xue A K，Liu S R，et al. Robust Absolute Stability Criteria for Uncertain Lur'e Systems of Neutral Type [J]. Int. J. of Robust and Nonlinear Control，2008，18(3)：278−295.

[9] Han Q L. A New Delay-Dependent Absolute Stability Criterion for A Class of Nonlinear Neutral Systems[J]. Automatica，2008，44(8)：272−277.

[10] He Y，Wang Q G，Lin C，et al. Augmented Lyapunov Functional and Delay-Dependent Stability Criteria for Neutral Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2005，15(8)：923−933.

[11] He Y，Wang Q G，Xie L H，et al. Further Improvement of Free-Weighting Matrices Technique for Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Trans. Autom. Control，2007，52 (2)：293−299.

[12] Han Q L，Yue D. Absolute Stability of Lur'e Systems with Time-Varying Delay[J]. IET Control Theory & Applications，2007，1(3)：854−859.

[13] Wu M，Feng Z Y，He Y，et al. Improved Delay-Dependent Absolute Stability and Robust Stability for A Class of Nonlinear Systems with A Time-Varying Delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2009，20(6)：694−702.

[14] Petersen I R，Hollot C V. A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems[J]. Automatica，1986，22(4)：397−411.

[15] Boyd S，Ghaoui L E，Feron E，et al. Linear Matrix Inequality in System and Control Theory[M]. Philadelphia: SIAM，1994.

（责任编辑：廖友媛）