第24卷第3期　　　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　　　Vol.24 No.3
2010年5月　　　　Journal of Hunan University of Technology　　　　May 2010

带多项偏差变元的非线性脉冲微分方程周期边值问题

叶国炳，王学斌，刘小花

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：发展了经典的上下解方法，建立了一些比较准则。通过运用这些结论和单调迭代技巧，得到了所考虑方程的周期边值问题的解的存在性。

关键词：非线性脉冲微分方程；周期边值；上下解方法；单调迭代技巧；极值解

中图分类号：O175.14　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673–9833(2010)03–0015–07

Periodic Boundary Value Problems for Nonlinear Impulsive Differential Equations with Multi-Deviation Arguments

Ye Guobing，Wang Xuebin，Liu Xiaohua

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract：Develops the classical lower and upper method, and establishes the comparison principles. By using the above conclusions and the monotone iterative technique, obtains the existence of the solutions of periodic boundary value problems for the equations.

Keywords：nonlinear impulsive differential equation; periodic boundary value; lower and upper method; monotone iterative technique; extremal solution

0　引言

近年来，因为脉冲微分方程有着广泛的应用背景，从而使得对于它的研究得到了极大重视，相应地，周期边值问题在脉冲微分方程理论中占据了重要的位置。本文中，笔者研究了一类带多项偏差变元的非线性脉冲微分方程的周期边值问题，该方程为：

$$\begin{cases} u'(t)=f\big(t,u(t),u(\varphi_1(t)),\cdots,u(\varphi_q(t))\big), \\ \qquad t\in J=[0,T],\ t\neq t_k; \\ \Delta u(t_k)=I_k(u(t_k)),\ k=1,\cdots,p; \\ u(0)=u(T); \end{cases} \tag{1}$$

式（1）中：

$0=t_0<t_1<\cdots<t_p<t_{p+1}=T$，

$J_0=J\setminus\{t_1,\cdots,t_p\}$，

$f:J\times\mathbf{R}^{q+1}\to\mathbf{R}$除$\{t_k\}\times\mathbf{R}^{q+1}$外都连续，

$f(t_k^-,x,y_1,\cdots,y_q)$和$f(t_k^+,x,y_1,\cdots,y_q)$存在，

$f(t_k^-,x,y_1,\cdots,y_q)=f(t_k,x,y_1,\cdots,y_q)$，且$\varphi_i:J\to\mathbf{R}$连续，$\varphi_i(J)\subseteq J\ (i=1,\cdots,q)$，并且

$I_k\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$\Delta u(t_k)=u(t_k^+)-u(t_k)$。

记$PC(X,\ Y)=\{u\mid u:X\to Y,X\subseteq\mathbf{R},Y\subseteq\mathbf{R}\}$，其中函数$u$在$X$上分段连续，且间断点$t_k\in X$是第一类的，

收稿日期：2009–11–03

通信作者：叶国炳（1962–），男，广东龙川人，湖南工业大学副教授，硕士，主要从事微分方程方面的教学与研究，
E-mail: yeguobing19@sina.com

即$u\left(t_k^+\right)$与$u\left(t_k^-\right)=u\left(t_k\right)$都存在。还记

$PC^1(X,Y)=\{u\mid u\in PC(X,Y)\}$，

其中$u(t)$在$t\in X$，$t\neq t_k$处具有连续导数。

设$\Omega=PC([0,T],\mathbf{R})\cap PC^1([0,T],\mathbf{R})$。

定义1 对于函数$\alpha,\beta\in\Omega$，如果存在$L>0$，$M_i\geq 0$和$0\leq L_k<1$使得下式成立：

$$\begin{cases}\alpha'(t)\leq f\left(t,\alpha(t),\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)-a(t),t\in J_0;\\ \Delta\left(\alpha\left(t_k\right)\right)\leq I_k\left(\alpha\left(t_k\right)\right)-L_k a_k,\ k=1,\cdots,p。\end{cases}$$

上式中

$$a(t)=\begin{cases}0,\quad \alpha(0)\leq\alpha(T);\\ \dfrac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)+1\right)\left(\alpha(0)-\alpha(T)\right),\\ \qquad\alpha(0)>\alpha(T);\end{cases}\tag{2}$$

$$a_k=\begin{cases}0,\qquad \alpha(0)\leq\alpha(T);\\ \dfrac{t_k}{T}\left(\alpha(0)-\alpha(T)\right),\quad \alpha(0)>\alpha(T);\end{cases}\tag{3}$$

并且

$$\begin{cases}\beta'(t)\geq f\left(t,\beta(t),\beta\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\beta\left(\varphi_q(t)\right)\right)+b(t),\ t\in J_0;\\ \Delta\left(\beta\left(t_k\right)\right)\geq I_k\left(\beta\left(t_k\right)\right)+L_k b_k,\ k=1,\cdots,p;\end{cases}$$

其中

$$b(t)=\begin{cases}0,\quad \beta(0)\geq\beta(T);\\ \dfrac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)+1\right)\left(\beta(T)-\beta(0)\right),\\ \qquad\beta(0)>\beta(T);\end{cases}\tag{4}$$

$$b_k=\begin{cases}0,\qquad \beta(0)\geq\beta(T);\\ \dfrac{t_k}{T}\left(\beta(T)-\beta(0)\right),\ \beta(0)<\beta(T)。\end{cases}\tag{5}$$

则称函数α,β分别为式（1）的上下解。经典上下解的定义分别见$\alpha(0)\leq\alpha(T)$与$\beta(0)\geq\beta(T)$的情况。

关于非线性脉冲微分方程的周期边值问题的文献已有一些，如文献[1-2]。在文献[1]中，作者主要研究了$f\left(t,u(t),u(\theta(t))\right)$仅含时滞项$u(\theta(t))$的情形；在文献[2]中，作者主要研究了$f\left(t,x(t),Kx(t),Sx(t)\right)$含积分项$Kx(t)$和$Sx(t)$的情形。受文献[1-2]的启发，这篇文章考虑了式（1）的周期边值问题，而解决此问题的主要工具是单调迭代技巧和现代上下解方法[3-5]。

1 预备知识

引理1[5] 设$s\in[0,T]$，$c_k\geq 0$，α_k都是常数，且$k=1,\cdots,p$，还设$p(t)$，$q(t)\in PC(J,\mathbf{R})$，$x\in PC^1(J,\mathbf{R})$。如果

$$\begin{cases}x'(t)\leq p(t)x(t)+q(t),\ t\in[s,T),\ t\neq t_k;\\ x\left(t_k^+\right)\leq c_k x\left(t_k\right)+\alpha_k,\ t_k\subset[s,T)。\end{cases}$$

那么对于任意的$t\in[s,T]$有

$$x(t)\leq x\left(s^-\right)\left(\prod_{s<t_k<t}c_k\right)\exp\left(\int_s^t p(u)\mathrm{d}u\right)+$$
$$\int_s^t\left(\prod_{u<t_k<t}c_k\right)\exp\left(\int_u^t p(\tau)\mathrm{d}\tau\right)q(u)\mathrm{d}u+$$
$$\sum_{s\leq t_k<t}\left(\prod_{t_k<t_i<t}c_i\right)\exp\left(\int_{t_k}^t p(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\alpha_k。$$

引理2[1] 设$u\in\Omega$，$L>0$，$M_i\geq 0$和$0\leq L_k<1$使得

A_1）$u'(t)+Lu(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i u\left(\varphi_i(t)\right)\leq 0,\ t\subset J_0$；

A_2）$\Delta u\left(t_k\right)\leq -L_k u\left(t_k\right),\ k=1,\cdots,p$；

A_3）$u(0)\leq u(T)$；

A_4）$\sum_{i=1}^{q}M_i\mathrm{e}^{LT}\int_0^T\prod_{s<t_k<T}\left(1-L_k\right)\mathrm{e}^{Ls}\mathrm{d}s\leq\prod_{k=1}^{p}\left(1-L_k\right)^2$。

那么在J上$u\leq 0$。

引理3[2] 设$u\in\Omega$，$L>0$，$M_i\geq 0$和$0\leq L_k<1$使得

B_1）$u'(t)+Lu(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i u\left(\varphi_i(t)\right)+$
$$\frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)+1\right)\left[u(0)-u(T)\right]\leq 0,\ t\in J_0;$$

B_2）$\Delta u\left(t_k\right)\leq -L_k u\left(t_k\right)-L_k\dfrac{t_k}{T}\left[u(0)-u(T)\right],k=1,\cdots,p$；

B_3）$u(0)>u(T)$；

且A_4）也成立，那么在J上$u\leq 0$。

2 线性问题的存在性

考虑方程（1）的线性问题

$$\begin{cases}u'(t)+Lu(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i u\left(\varphi_i(t)\right)=\sigma(t),\ t\in J_0;\\ \Delta u\left(t_k\right)=-L_k u\left(t_k\right)+\gamma_k,\ k=1,\cdots,p;\\ u(0)=u(T)。\end{cases}\tag{6}$$

式（6）中：

$\sigma(t)\in PC(J,\mathbf{R})$，

$\gamma_k\in\mathbf{R}$，$k=1,\cdots,p$，

$L>0$，$M_i\geq 0$，$0\leq L_k<1$。

对于$\alpha,\beta\in\Omega$，设

$[\alpha,\beta]=\left\{u\left|\alpha(t)\leq u(t)\leq\beta(t),\ t\in J\right.\right\}$，

则可得后面的定理。

定理1 设$\alpha,\beta\in\Omega$，且满足下列条件:

C_1）$\alpha\le\beta$，$t\in J$；

C_2）$\alpha'(t)+L\alpha(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\alpha(\varphi_i(t))\le\sigma(t)-a(t)$，$t\in J_0$；

$$\Delta\alpha(t_k)\le -L_k\alpha(t_k)-\gamma_k-a_k,\ k=1,\cdots,p;$$

$$\beta'(t)-L\beta(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\beta(\varphi_i(t))\ge\sigma(t)-b(t),\ t\in J_0;$$

其中：$a(t), b(t), a_k, b_k$的定义见式（2）～（5），且A_4）也成立。那么公式（6）存在唯一解u，并且$u\in[\alpha,\beta]$。

证明 分3步来证。

步骤1 如果u_1, u_2是式（6）的解，设$v_1=u_1-u_2$和$v_2=u_2-u_1$，则

$$\begin{cases} v_1'(t)+Lv_1(t)+\sum_{i=1}^{q}M_iv_1(\varphi_i(t))=0,\ t\in J_0; \\ \Delta v_1(t_k)=-L_kv_1(t_k),\ k=1,\cdots,p; \\ v_1(0)=v_1(T)。\end{cases}$$

由引理2得：$v_1=u_1-u_2\le 0$，

同理得$v_2=u_2-u_1\le 0$，即$u_1=u_2$。

那么式（6）存在唯一解。

步骤2 如果ϖ,γ分别是式（6）的古典上下解，且$\varpi\le\gamma$，下面证明式（6）有一个解u，且$u\in[\varpi,\gamma]$。

记$u(\cdot,a)$为方程（7）的唯一解。

$$\begin{cases} u'(t)+Lu(t)+\sum_{i=1}^{q}M_iu(\varphi_i(t))=\sigma(t),\ t\in J_0; \\ \Delta u(t_k)=-L_ku(t_k)+\gamma_k,\ k=1,\cdots,p; \\ u(0)=a。\end{cases} \tag{7}$$

首先需要推出

$\varpi(0)<u(T,\varpi(0))$和$\gamma(0)>u(T,\gamma(0))$。

假设$\varpi(0)>u(T,\varpi(0))$。设$v(t)=\varpi(t)-u(t,\varpi(0))$，则函数$v$满足

$$\begin{cases} v'(t)-Lv(t)+\sum_{i=1}^{q}M_iv(\varphi_i(t))\le 0,\ t\in J_0; \\ \Delta v(t_k)=-L_kv(t_k),\ k=1,\cdots,p; \\ v(0)=\varpi(0)-\varpi(0)<\varpi(T)-u(T,\varpi(0))=v(T)。\end{cases}$$

由引理2得，在J上$v(t)\le 0$。这样就导出

$v(T)=\varpi(T)-u(T,\varpi(0))\le 0$，

因此有$\varpi(0)\le\varpi(T)\le u(T,\varpi(0))$，

这与前面的假设相矛盾，从而$\varpi(0)\le u(T,\varpi(0))$。

类似可得$\gamma(0)\ge u(T,\gamma(0))$。

接下来需要推出存在$c\in[\varpi(0),\gamma(0)]$使得

$u(0,c)=u(T,c)$。

考虑$\varpi(0)=\gamma(0)$和$\varpi(0)<\gamma(0)$2种情况。

1）$\varpi(0)=\gamma(0)$。

这时$\varpi(0)<u(T,\gamma(0))<\gamma(0)-\varpi(0)$。

因此$u(T,\gamma(0))=\varpi(0)$。则选$c=\varpi(0)$，这样$u=u(\cdot,c)$就是式（6）的解。

2）$\varpi(0)<\gamma(0)$。

这时定义算子

$F:[\varpi(0),\gamma(0)]\to R$，$F(s)=s-u(T,s)$。

显然F连续。因为$F(\varpi(0))\le 0\le F(\gamma(0))$，则必存在一点$c\in[\varpi(0),\gamma(0)]$使得$F(c)=0$。这样$u=u(\cdot,c)$就是式（6）的解。

最后需要推出$u\in[\varpi,\gamma]$。

设$m_1(t)=\varpi(t)-u(t,c)$和$m_2(t)=u(t,c)-\gamma(t)$。显然$m_1,m_2\in\Omega$，且

$$\begin{cases} m_1'(t)+Lm_1(t)-\sum_{i=1}^{q}M_im_1(\varphi_i(t))\le 0,\ t\in J_0; \\ \Delta m_1(t_k)=-L_km_1(t_k),\ k=1,\cdots,p; \\ m_1(0)=\varpi(0)-u(0,c)<\varpi(T)-u(T,c)=m_1(T)。\end{cases}$$

运用引理2得，在J上$m_1\le 0$，同理得$m_2\le 0$。因此，在J上$\varpi\le u(\cdot,c)\le\gamma$。

步骤3 证明$\bar{\alpha}(t),\bar{\beta}(t)$ $(\bar{\alpha}\le\bar{\beta})$分别是式（6）的古典上下解，且$[\bar{\alpha}(t),\bar{\beta}(t)]\subseteq[\alpha,\beta]$，其中

$$\bar{\alpha}(t)=\begin{cases} \alpha(t), & \alpha(0)\le\alpha(T); \\ \alpha(t)+\frac{t}{T}[\alpha(0)-\alpha(T)], & \alpha(0)>\alpha(T); \end{cases} \tag{8}$$

$$\bar{\beta}(t)=\begin{cases} \beta(t), & \beta(0)\ge\beta(T); \\ \beta(t)-\frac{t}{T}[\beta(T)-\beta(0)], & \beta(0)<\beta(T)。\end{cases} \tag{9}$$

显然，在J上$\alpha\le\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}\le\beta$。

因此，$\bar{\alpha}(0)=\alpha(0)\le\bar{\alpha}(T)$，$\bar{\beta}(0)=\beta(0)\ge\bar{\beta}(T)$。

现在，考虑$\alpha(0)\le\alpha(T)$和$\alpha(0)>\alpha(T)$2种情况。

1）$\alpha(0)\le\alpha(T)$。

这时：

$$\bar{\alpha}'(t)+L\bar{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\bar{\alpha}(\varphi_i(t))=\alpha'(t)+L\alpha(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\alpha(\varphi_i(t))<\sigma(t),\ t\in J_0;$$

$$\Delta\bar{\alpha}(t_k)=\Delta\alpha(t_k)(t_k)\le -L_k\alpha(t_k)+\gamma_k-a_k\le -L_k\alpha(t_k)+\gamma_k-L_ka_k-L_k[\alpha(t_k)-a_k]+\gamma_k= -L_k\alpha(t_k)-\gamma_k,\ k=1,\cdots,p;$$

还加上$\bar{\alpha}(0)\le\bar{\alpha}(T)$，因此$\bar{\alpha}(t)$是式（6）的古典下解。

2）$\alpha(0)>\alpha(T)$。

这时：

$$\bar{\alpha}'(t)+L\bar{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\bar{\alpha}(\varphi_i(t))=$$
$$\alpha'(t)+L\alpha(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\alpha(\varphi_i(t))+$$
$$\frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)+1\right)[\alpha(0)-\alpha(T)]\le\sigma(t),\ t\in J_0;$$

$$\Delta\bar{\alpha}(t_k)=\Delta\alpha(t_k)\le -L_k\alpha(t_k)+\gamma_k-a_k\le$$
$$-L_k\alpha(t_k)+\gamma_k-L_ka_k-L_k\lfloor\alpha(t_k)-a_k\rfloor+\gamma_k-$$
$$-L_k\bar{\alpha}(t_k)+\gamma_k,\ k=1,\cdots,p;$$

还加上$\bar{\alpha}(0)\le\bar{\alpha}(T)$，因此$\bar{\alpha}(t)$是式（6）的古典下解。

因此，无论哪种情况，$\bar{\alpha}$都是式（6）的古典下解。

同理可得，$\bar{\beta}$是式（6）的古典上解。

接下来考虑函数 $m=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$。

这时：

$$m'(t)-Lm(t)+\sum_{i=1}^{q}M_im(\varphi_i(t))=$$
$$\left[\bar{\alpha}'(t)+L\bar{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\bar{\alpha}(\varphi_i(t))\right]$$
$$\left[\bar{\beta}'(t)+L\bar{\beta}(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\bar{\beta}(\varphi_i(t))\right]\le$$
$$\sigma(t)-\sigma(t)=0,\ t\in J_0;$$

$$\Delta m(t_k)=\Delta\bar{\alpha}(t_k)-\Delta\bar{\beta}(t_k)\le[-L_k\bar{\alpha}(t_k)-\gamma_k]-$$
$$[-L_k\bar{\beta}(t_k)+\gamma_k]=-L_km(t_k),$$
$$k=1,\cdots,p;$$

$$m(0)=\bar{\alpha}(0)-\bar{\beta}(0)\le\bar{\alpha}(T)-\bar{\beta}(T)=m(T)\text{。}$$

运用引理2得，在J上$m\le0$，即在J上$\bar{\alpha}\le\bar{\beta}$。

至此定理证毕。

3 非线性问题的存在性

定理2 设$\alpha,\beta\in\Omega$，且满足下列条件：

D_1） α,β $(\alpha\le\beta)$分别是式（1）的上下解；

D_2） 当$t\in J_0$，$\alpha\le x_1\le x_2\le\beta$，
$\alpha(\varphi_i(t))\le y_{i1}(\varphi_i(t))\le y_{i2}(\varphi_i(t))\le\beta(\varphi_i(t))$，
$i=1,\cdots,q$时；

$$f(t,x_2,y_{12},\cdots,y_{q2})-f(t,x_1,y_{11},\cdots,y_{q1})\ge$$
$$-L(x_2-x_1)-\sum_{i=1}^{q}M_i(y_{i2}-y_{i1})\text{；}$$

D_3） 当$\alpha(t_k)<y(t_k)<x(t_k)<\beta(t_k)$时，
$I_k(x)-I_k(y)\ge-L_k(x-y)$。

且A_4）也成立，那么，存在单调序列
$\bar{\alpha}_n(t),\bar{\beta}_n(t)$ $(\bar{\alpha}_0=\bar{\alpha},\bar{\beta}_0=\bar{\beta}$、$\bar{\alpha}$、$\bar{\beta}$定义见式（8）与（9）），使得$\lim_{n\to\infty}\bar{\alpha}_n(t)=\rho(t)$，$\lim_{n\to\infty}\bar{\beta}_n(t)=\psi(t)$在$J$上一致收敛，且$\rho(t),\psi(t)$分别是式（1）的最小与最大解。

证明 分3步来证明。

步骤1 显然，在J上$\alpha\le\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}\le\beta$，那么

$\alpha(0)=\bar{\alpha}(0)\le\bar{\alpha}(T)$，$\bar{\beta}(0)=\beta(0)\ge\bar{\beta}(T)$。

设函数$m=\bar{\alpha}-\bar{\beta}$，则

$m(0)=\bar{\alpha}(0)-\bar{\beta}(0)\le\bar{\alpha}(T)-\bar{\beta}(T)=m(T)$。

接下来，考虑如下2种情况：

1） $\alpha(0)>\alpha(T)$，$\beta(0)<\beta(T)$。

首先，由D_2)得：

$$m'(t)+Lm(t)+\sum_{i=1}^{q}M_im(\varphi_i(t))=$$
$$\left\{\alpha'(t)+L\alpha(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\alpha(\varphi_i(t))+\right.$$
$$\left.\frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)+1\right)[\alpha(0)-\alpha(T)]\right\}-$$
$$\left\{\beta'(t)+L\beta(t)+\sum_{i=1}^{q}M_i\beta(\varphi_i(t))+\right.$$
$$\left.\frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)+1\right)[\beta(T)-\beta(0)]\right\}\le$$
$$\left[f(t,\alpha(t),\alpha(\varphi_1(t)),\cdots,\alpha(\varphi_q(t)))-\right.$$
$$\left.f(t,\beta(t),\beta(\varphi_1(t)),\cdots,\beta(\varphi_q(t)))\right]-$$
$$L[\beta(t)-\alpha(t)]-$$
$$\sum_{i=1}^{q}M_i[\beta(\varphi_i(t))-\alpha(\varphi_i(t))]\le0,\ t\in J_0,$$

再由D_3）得：

$$\Delta m(t_k)=\Delta\bar{\alpha}(t_k)-\Delta\bar{\beta}(t_k)=\Delta\alpha(t_k)-\Delta\beta(t_k)\le$$
$$[I_k(\alpha(t_k))-L_ka_k]-[I_k(\beta(t_k))+L_kb_k]\le$$
$$-L_k[\alpha(t_k)-\beta(t_k)]-L_ka_k-L_kb_k\le$$
$$-L_km(t_k),\ k=1,\cdots,p\text{。}$$

最后，加上$m(0)\le m(T)$，运用引理2，在J上$m(t)\le0$，即在J上$\bar{\alpha}\le\bar{\beta}$。

下面考虑：

$$\bar{\alpha}'(t)=\alpha'(t)+\frac{1}{T}[\alpha(0)-\alpha(T)]\le$$
$$f(t,\alpha(t),\alpha(\varphi_1(t)),\cdots,\alpha(\varphi_q(t)))-$$
$$\frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q}M_i\varphi_i(t)\right)[\alpha(0)-\alpha(T)]\text{。}$$

因为$\alpha\le\bar{\alpha}\le\beta$，由$D_2$）得：

$$
\begin{aligned}
& f\left(t,\bar\alpha(t),\bar\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\bar\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)- \\
&\quad f\left(t,\alpha(t),\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)\ge \\
&\quad -L\left[\bar\alpha(t)-\alpha(t)\right]- \\
&\quad \sum_{i=1}^{q} M_i\left[\bar\alpha\left(\varphi_i(t)\right)-\alpha\left(\varphi_i(t)\right)\right],
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\bar\alpha'(t) \le\ & f\left(t,\bar\alpha(t),\bar\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\bar\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)+ \\
& L\left[\bar\alpha(t)-\alpha(t)\right]+\sum_{i=1}^{q} M_i\left[\bar\alpha\left(\varphi_i(t)\right)-\alpha\left(\varphi_i(t)\right)\right]- \\
& \frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q} M_i\varphi_i(t)\right)\left[\alpha(0)-\alpha(T)\right]= \\
& f\left(t,\bar\alpha(t),\bar\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\bar\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)+ \\
& \frac{Lt}{T}\left[\alpha(0)-\alpha(T)\right]+ \\
& \frac{1}{T}\left(\sum_{i=1}^{q} M_i\varphi_i(t)\right)\left[\alpha(0)-\alpha(T)\right]- \\
& \frac{1}{T}\left(Lt+\sum_{i=1}^{q} M_i\varphi_i(t)\right)\left[\alpha(0)-\alpha(T)\right]\le \\
& f\left(t,\bar\alpha(t),\bar\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\bar\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right); \qquad (10)
\end{aligned}
$$

由 D_3）得：

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar\alpha(t_k) = \Delta\alpha(t_k) \le\ & I_k\left(\alpha(t_k)\right)-L_k\cdot\frac{t_k}{T}\left[\alpha(0)-\alpha(T)\right]\le \\
& I_k\left(\bar\alpha(t_k)\right)+L_k\left[\bar\alpha(t_k)-\alpha(t_k)\right]- \\
& L_k\cdot\frac{t_k}{T}\left[\alpha(0)-\alpha(T)\right]\le I_k\left(\bar\alpha(t_k)\right)。
\end{aligned}
$$

2） $\alpha(0)\le\alpha(T)$，$\beta(0)\ge\beta(T)$。

在$\alpha(0)\le\alpha(T)$，$\beta(0)\ge\beta(T)$的情况下，易得式（10）与式（11）。因此，无论哪种情况，$\bar\alpha$都是系统（1）的古典下解。同理可得$\bar\beta$是系统（1）的古典上解，而且$\left[\bar\alpha,\bar\beta\right]\subseteq[\alpha,\beta]$。

步骤2　对于任意$\eta\in\left[\bar\alpha,\bar\beta\right]$，考虑

$$
\begin{cases}
u'(t)+Lu(t)+\sum_{i=1}^{q} M_i u\left(\varphi_i(t)\right)= \\
\qquad L\eta(t)+\sum_{i=1}^{q} M_i\eta\left(\varphi_i(t)\right)+ \\
\qquad f\left(t,\eta(t),\eta\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\eta\left(\varphi_q(t)\right)\right),\ t\in J_0; \\
\Delta u(t_k)-L_k u(t_k)=I_k\left(\eta(t_k)\right)-L_k\eta(t_k), \\
\qquad k=1,\cdots,p; \\
u(0)=u(T)。
\end{cases}
\qquad (12)
$$

由定理1得式（12）有唯一解$u\in\Omega$。

定义算子A，其中$u=A\eta$。A具有下列性质：

E_1） $\bar\alpha\le A\bar\alpha$，$\bar\beta\ge A\bar\beta$；$E_2$） $A\eta_1\le A\eta_2$，

其中η_1、$\eta_2\in\left[\bar\alpha,\bar\beta\right]$且$\eta_1\le\eta_2$。

先设$m=\bar\alpha-\bar\alpha_1$，其中$\bar\alpha_1=A\bar\alpha$。这样可得

$$
\begin{aligned}
m'(t)=\ & \bar\alpha'(t)-\bar\alpha_1'(t)\le \\
& f\left(t,\bar\alpha(t),\bar\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\bar\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)- \\
& \left[L\bar\alpha_1(t)-\sum_{i=1}^{q} M_i\bar\alpha_1\left(\varphi_i(t)\right)\right]- \\
& \left[L\bar\alpha(t)+\sum_{i=1}^{q} M_i\bar\alpha\left(\varphi_i(t)\right)\right]- \\
& f\left(t,\alpha(t),\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)= \\
& -L\left[\bar\alpha(t)-\bar\alpha_1(t)\right]- \\
& \sum_{i=1}^{q} M_i\left[\bar\alpha\left(\varphi_i(t)\right)-\bar\alpha_1\left(\varphi_i(t)\right)\right]= \\
& -Lm(t)-\sum_{i=1}^{q} M_i m\left(\varphi_i(t)\right),\quad t\in J_0; \\
\Delta m(t_k)=\ & \Delta\bar\alpha(t_k)-\Delta\bar\alpha_1(t_k)\le \\
& I_k\left(\bar\alpha(t_k)\right)-I_k\left(\bar\alpha(t_k)\right)-L_k\bar\alpha(t_k)+L_k\bar\alpha_1(t_k)= \\
& -L_k m(t_k),\ k=1,\cdots,p; \\
m(0)=\ & \bar\alpha(0)-\bar\alpha_1(0)\le\bar\alpha(T)-\bar\alpha_1(T)=m(T)。
\end{aligned}
$$

由引理2得，在J上$m(t)\le 0$，即$\bar\alpha\le A\bar\alpha$。同理可得$\bar\beta\ge A\bar\beta$。

接下来设$v_1=A\eta_1$，$v_2=A\eta_2$，其中η_1、$\eta_2\in\left[\bar\alpha,\bar\beta\right]$，且$\eta_1\le\eta_2$。记$m=v_1-v_2$。由$D_2$)，$D_3$)和式（12）可得

$$
\begin{aligned}
m'(t)=\ & \bar\alpha'(t)-\bar\alpha_1'(t)\le \\
& f\left(t,\alpha(t),\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)+ \\
& \left[L\bar\alpha_1(t)+\sum_{i=1}^{q} M_i\bar\alpha_1\left(\varphi_i(t)\right)\right]- \\
& \left[L\bar\alpha(t)+\sum_{i=1}^{q} M_i\bar\alpha\left(\varphi_i(t)\right)\right]- \\
& f\left(t,\bar\alpha(t),\bar\alpha\left(\varphi_1(t)\right),\cdots,\bar\alpha\left(\varphi_q(t)\right)\right)= \\
& -L\left[\bar\alpha(t)-\bar\alpha_1(t)\right]- \\
& \sum_{i=1}^{q} M_i\left[\bar\alpha\left(\varphi_i(t)\right)-\bar\alpha_1\left(\varphi_i(t)\right)\right]= \\
& -Lm(t)-\sum_{i=1}^{q} M_i m\left(\varphi_i(t)\right),\quad t\in J_0; \\
\Delta m(t_k)=\ & \Delta\bar\alpha(t_k)-\Delta\bar\alpha_1(t_k)\le \\
& I_k\left(\bar\alpha(t_k)\right)-I_k\left(\bar\alpha(t_k)\right)-L_k\bar\alpha(t_k)+L_k\bar\alpha_1(t_k)= \\
& -L_k m(t_k),\ k=1,\cdots,p; \\
m(0)=\ & \bar\alpha(0)-\bar\alpha_1(0)\le\bar\alpha(T)-\bar\alpha_1(T)=m(T)。
\end{aligned}
$$

由引理2得，在J上$m(t)\le 0$，即在J上$v_1(t)\le v_2(t)$。那么$A\eta_1\le A\eta_2$，其中η_1、$\eta_2\in[\bar{\alpha},\beta]$，且$\eta_1\le\eta_2$。

步骤3　定义序列$\{\bar{\alpha}_n(t)\}$与$\{\bar{\beta}_n(t)\}$，其中

$\bar{\alpha}_{n+1}=A\bar{\alpha}_n$，$\bar{\beta}_{n+1}=A\bar{\beta}_n$，$\bar{\alpha}_0=\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}_0=\bar{\beta}$。

由$E_1)$, $E_2)$得

$\bar{\alpha}_0\le\bar{\alpha}_1\le\cdots\le\bar{\alpha}_n\le\bar{\beta}_n\le\cdots\le\bar{\beta}_1\le\bar{\beta}_0$，$n\in N$。

因此可推出$\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\alpha}_n(t)=\rho(t)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\bar{\beta}_n(t)=\psi(t)$在$J$上一致收敛。

考虑方程

$$\begin{cases}\bar{\alpha}'_{n+1}(t)+L\bar{\alpha}_{n+1}(t)+\sum\limits_{i=1}^{q}M_i\bar{\alpha}_{n+1}(\varphi_i(t))=\\\qquad L\bar{\alpha}_n(t)+\sum\limits_{i=1}^{q}M_i\bar{\alpha}_n(\varphi_i(t))+\\\qquad f\left(t,\bar{\alpha}_n(t),\bar{\alpha}_n(\varphi_1(t)),\cdots,\bar{\alpha}_n(\varphi_q(t))\right),\ t\in J_0;\\\Delta\bar{\alpha}_{n+1}(t_k)+L_k\bar{\alpha}_{n+1}(t_k)=I_k(\bar{\alpha}_n(t_k))+L_k\bar{\alpha}_n(t_k),\\\qquad k=1,\cdots,p;\\\bar{\alpha}_{n+1}(0)=\bar{\alpha}_{n+1}(T)\text{。}\end{cases}$$

令$n\to\infty$，得ρ是系统（1）的解，同理可得ψ也是系统（1）的解。

最后，设u是在$[\bar{\alpha},\beta]$上系统（1）的任意解。显然$\bar{\alpha}_0\le u$。假设$\bar{\alpha}_n\le u$。通过考虑函数$m=u-\bar{\alpha}_{n+1}$与运用引理3得$\bar{\alpha}_{n+1}\le u$。然后通过取极限得，在J上$\rho\le u$。同理可得在J上$u\le\psi$。那么$\rho(t)$, $\psi(t)$分别是系统（1）的最小与最大解。定理2证毕。

4　应用实例

考虑方程

$$\begin{cases}u'(t)=-u^2(t)-\dfrac{1}{81(e^2-1)}\left[u\left(\dfrac{1}{3}t+\dfrac{1}{2}\right)+u(t^3)\right]+\\\qquad\dfrac{t}{81(e^2-1)},\ t\in J=[0,1],\ t\ne t_1;\\\Delta u(t_1)=-(1-e^{-1})u(t_1),\ t_1=\dfrac{1}{2};\\u(0)=u(1)\text{。}\end{cases}\tag{13}$$

$\alpha=0$显然是式（13）的古典下解，也就是下解。对于$\beta(t)=\dfrac{t}{100}+\dfrac{99}{100}$，$t\in[0,1]$，显然$\beta(0)<\beta(1)$。

取$L=2$，$M_1=M_2=\dfrac{1}{81(e^2-1)}$，$0\le L_1=1-e^{-1}<1$，那么$b_1=\dfrac{1}{200}$，

$$b(t)=\frac{1}{100}\left[2t+\frac{1}{81(e^2-1)}\left(\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)+t^3\right)+1\right]\text{。}$$

从$0\ge-\dfrac{1}{81(e^2-1)}\times\dfrac{98}{100}+\dfrac{1}{81(e^2-1)}\times\dfrac{81(e^2-1)\times 2t}{100}\ge$

$$-\beta^2(t)-\frac{1}{81(e^2-1)}\times\frac{98}{100}+\frac{2t}{100}=$$

$$-\beta^2(t)-\frac{1}{81(e^2-1)}\times\frac{2\times 99}{100}+\frac{t}{81(e^2-1)}+\frac{1}{100}\times 2t,$$

$$\frac{1}{100}\ge-\beta^2(t)-\frac{1}{81(e^2-1)}\times\frac{2\times 99}{100}-\frac{1}{81(e^2-1)}\times\frac{1}{100}\left[\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)-t^3\right]+\frac{1}{81(e^2-1)}\times\frac{1}{100}\left[\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)+t^3\right]+\frac{t}{81(e^2-1)}+\frac{1}{100}\times 2t+\frac{1}{100}=$$

$$-\beta^2(t)-\frac{1}{81(e^2-1)}\left\{\left[\frac{1}{100}\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)+\frac{99}{100}\right]+\left[\frac{1}{100}t^3+\frac{99}{100}\right]\right\}+\frac{t}{81(e^2-1)}+$$

$$\frac{1}{100}\left\{2t+\frac{1}{81(e^2-1)}\left[\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)+t^3\right]+1\right\},$$

就有

$$\beta'(t)\ge-\beta^2(t)-\frac{1}{81(e^2-1)}\left[\beta\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)+\beta(t^3)\right]+\frac{t}{81(e^2-1)}+b(t)\text{。}$$

从$0\ge-(1-e^{-1})\left(\dfrac{1}{100}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{99}{100}\right)+(1-e^{-1})\times\dfrac{1}{200}$，

就有

$$\Delta\beta\left(\frac{1}{2}\right)\ge I_1\left(\beta\left(\frac{1}{2}\right)\right)+L_1b_1\text{。}$$

这就意味着$\beta(t)$是式（13）的上解，并且在J上$\alpha\le\beta$。进一步，对于

$\alpha\le x_1\le x_2\le\beta$，

$\alpha\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)\le y_1\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)\le y_2\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)\le\beta\left(\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\right)$,

$\alpha(t^3)\le z_1(t^3)\le z_2(t^3)\le\beta(t^3)$,

有$f(t,x_2,y_2,z_2)-f(t,x_1,y_1,z_1)=$

$$-(x_2^2-x_1^2)-\frac{1}{81(e^2-1)}\left[(y_2-y_1)+(z_2-z_1)\right]\ge$$

$$-2(x_2-x_1)-\frac{1}{81(e^2-1)}\left[(y_2-y_1)+(z_2-z_1)\right]=$$

$$L(x_2-x_1)+M_1(y_2-y_1)+M_2(z_2-z_1);$$

对于$\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\le y\left(\frac{1}{2}\right)\le x\left(\frac{1}{2}\right)\le \beta\left(\frac{1}{2}\right)$，有

$$I_1(x)-I_1(y)=-\left(1-e^{-1}\right)x+\left(1-e^{-1}\right)y\ge -\left(1-e^{-1}\right)(x-y)=-L_1(x-y)。$$

最后有

$$\sum_{i=1}^{2} M_i e^{t}\int_0^T \prod_{t<t_k<T}(1-L_k)e^{2s}ds=$$
$$\frac{2e^2}{81\left(e^2-1\right)}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-1}e^{2s}ds+\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2s}ds\right]\le$$
$$\frac{2e^2}{81(e-1)}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2s}ds+\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2s}ds\right]=$$
$$\frac{2e^2}{81\left(e^2-1\right)}\int_0^1 e^{2s}ds=\frac{e^2}{3^4}\le e^{-2}\le \prod_{k=1}^{2}(1-L_k)^2。$$

由上述可知，定理2的所有条件都满足。因此，式（13）有处在$[\alpha,\ \beta]$上的最小与最大解。

参考文献：

[1] Li J，Shen J. Periodic Boundary Value Problems for Delay Differential Equations with Impulses[J]. J. Comput. Appl. Math.，2006，193：563-573.

[2] Li J，Shen J. Periodic Boundary Value Problems for Impulsive Integro-Differential Equations of Mixed Type[J]. J. Appl. Math. Comput.，2006，183：890-902.

[3] Li W，Huo H. Global Attractivity of Positive Periodic Solutions for An Impulsive Delay Periodic Model of Respiratory Dynamics[J]. J. Comput. Appl. Math.，2005，174：227-238.

[4] Hakl R，Kihuradze I，Pauza B. Upper and Lower Solutions of Boundary Value Problems for Functional Differential Equations and Theorems on Functional Differential Inequalities[J]. Georgian Math. J.，2000，7：489-512.

[5] Bainov D D，Simeonov P S. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. Harlow: Longman Scientific and Technical，1993.

[6] 叶国炳，周小奇. 带强迫项的三阶脉冲时滞微分方程的振动性与渐近性[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(3)：22-25

Ye Guobing，Zhou Xiaoqi. Oscillatory and Asymptotic Properties of Third Order Impulsive Delay Differential Equations with Forcing Term[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(3)：22-25

（责任编辑：廖友媛）

“全球低碳城市联合研究中心”落户我校

2010年5月11日，由中国社会科学院与我校联合组建的全球低碳城市联合研究中心在我校正式成立，中国社会科学院城市发展与环境研究所所长潘家华，我校党委书记侯清麟、校长王汉青，株洲市副市长肖文伟以及相关单位负责人共同为该研究中心揭牌。至此，由国家级科研院所与地方高校联姻打造的低碳城市研究项目正式启动。

揭牌仪式由侯清麟主持，副校长谷正气宣读了关于成立“中国社会科学院城市发展与环境研究所&湖南工业大学全球低碳城市联合研究中心”的相关文件。