关于线性代数课程引入的思考

唐扬斌，陈　挚，戴清平

（国防科学技术大学 理学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：提出一种从图的问题出发的线性代数课程引入新思路，作为对现有的以线性方程组为出发点的方式的补充。通过案例介绍了基本的思路，并就其在课堂教学中的实施进行探讨。

关键词：线性代数；图；矩阵

中图分类号：G642.3　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2010)02-0077-03

Thinking on Introduction of Linear Algebra Course

Tang Yangbin，Chen Zhi，Dai Qingping

（School of Science，National University of Defense Technology, Changsha 410073，China）

Abstract: Proposes a new concept of introducing linear algebra from graph theory, which acting as a supplement for the existing way starting from linear equations. Illustrates basic ideas through cases and discusses its implementation in classroom teaching.

Keywords: linear algebra; graph; matrix

0　引言

“线性代数”是大学数学的重要基础课之一，在大学阶段的课程学习中具有非常重要而独特的地位[1-2]。特别是随着计算机技术的发展，将数学问题转换为数值计算问题已经成为人们研究和解决问题的常用思路，其中线性代数扮演着重要的角色[3]。

在大学数学课程的教学中，“第一堂课”或者说课程的引入，历来受到广泛重视。在课程之初，能否通过形象生动的实例激发学生对于课程内容的兴趣，拓展其关注的视野，是每一名大学数学老师需要不断认真思考的问题。而对于大学生来说，学习从实际问题中抽象出数学概念，再将逻辑推理的结论应用于实际，也是其综合能力培养的重要方面。

目前，国内外在线性代数课程的引入上，大都以线性方程组及其应用作为基本的起点。由于线性方程组的有关问题贯穿整个课程始终，这一思路也被大多数的教材[1-5]所采用。然而，从现代科学技术的发展来看，“线性代数”中的矩阵、行列式等研究对象，应用范围已不局限于解决线性方程组的有关问题[6-7]。而其中一些重要应用，已经成为矩阵理论研究发展新的成长点。相应地，是否有可能甚至有必要在线性代数课程引入中，加入一些新的问题和案例，就成为一个值得研究和思考的问题。

基于以上认识，笔者在此提出一种从图问题出发的新的课程引入思路，并结合实例对其在课程中的实施加以探讨。这一新思路能够对现有的以线性方程组为主的引入方式形成一定的补充，能对扩展学生的知识面，提升其学习热情产生有效的促进作用。

1　从线性方程组出发的课程引入

马萨诸塞大学达特茅斯分校的Steven J. Leon在其编撰的*Linear Algebra with Applications*（线性代数及其应用）[3]一书中指出：求解线性方程组或许是数学问题中最重要的问题，超过75 %的科学研究和工程应用

收稿日期：2009-07-25

通信作者：唐扬斌（1975-），男，四川开江人，国防科学技术大学讲师，博士，主要研究方向为系统科学理论与计算机软件，E-mail：ybtang21c@gmail.com

中的数学问题，在某个阶段都涉及线性方程组的求解。利用新的数学方法，往往可以将较为复杂的问题转化为线性方程组。线性方程组在商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域都有大量且非常重要的应用。

正是基于这一原因，由线性方程组出发展开线性代数课程的介绍，已成为国内外众多大学线性代数课程授课教师的一个共同选择。通过列举线性方程组的实际应用，能够帮助学生领会本门课程的重要意义，同时对其基本的研究对象获得较为准确的认识。以线性规划[8]问题为例，它是工程应用中使用最为广泛的一类优化方法。其代表性案例包括产品规划问题、生产计划问题、网络规划问题等。这类问题的解决对于人们日常的生产、生活都具有重要意义。

然而从实际教学情况来看，使用线性方程组作为课程的引入也可能导致一些问题。如由于学生中学阶段接触过的线性方程组应用问题往往较为简单，缺乏对它更为全面、深入的认识，因此，大多数人只将线性方程组视为一个抽象的数学对象。为此，以线性方程组作为课程引入点，势必需要介绍大量的背景知识。而这样一来，学生有可能形成一种“矩阵是线性方程组这一抽象对象的抽象”的简单印象。更为重要的是，如果仅以线性方程组作为引入，由于课程内容对于线性方程组问题的始终关注，容易使之造成“线性代数就是关于线性方程组的学问”这一错误认识，对课程价值的认识流于偏狭。为此，如果能在现有引入案例的基础上，增加一些更为直观、形象的实例，由直观的对象出发，直接形成矩阵、行列式等抽象概念，并将理论分析的结果与实际应用有效结合，势必对学生的思维产生更大的触动。对于其更为全面、深入地认识本门课程，激发学习的兴趣带来帮助。

本文结合代数图论[6-7]的一些研究成果，从图的问题出发，提出一种新的引入思路。通过图与矩阵的对应表示，及图与矩阵在性质上的直接关联，揭示线性代数课程内容的广泛性及其重要的应用前景。

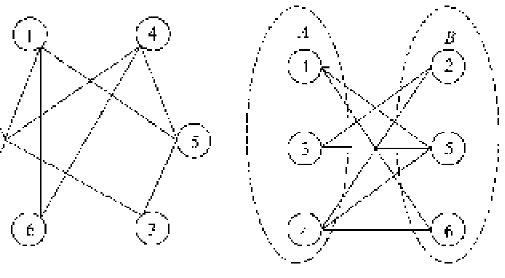
2　从图的计算到矩阵分析

课程引入需要回答两大问题：一是“从何而来”，即如何从实际问题中建模抽象出数学概念；二是“有什么用”，即说明基于数学方法得到的结果对于实际问题的意义。以下结合实例谈一谈图与矩阵的关系。

2.1　“如何对图进行计算？”——矩阵的引入

所谓图，简单地说，就是点与线的组合[6]。在此笔者以简单图为例，这类图的特点是任意线段都连接2个不同端点，如图1中的a)所示。

计算机是现代科学的重要工具，大量的科学与工程问题都可转化为计算机内部的计算问题加以解决。那么，对于图来说，该如何进行计算呢？这是我们需要考虑的第一个问题。不难想到，如果按照点与点之间的连接关系来建模，可将图与表格建立起直接的对应，如图1中的a)所示图形可转化为表1。



a）简单图　　b）二部图

图1　图的示例

Fig. 1　Examples of graph

表1　图1 a)对应的表格

Table 1　In accordance with Figure 1 a)

点	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	1
2	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	0
6	1	0	1	1	0	0

注：矩阵构造方式如下：每个位置的值由对应2点及连接2点的边决定，如果2点间存在一条边，值为1，否则为0；对角线位置全部取0。

至此，图形的问题就被转化为数字的问题。接下来易想到，如果保持以上的行列排列次序，完全可将表格中的第一行、第一列，及表格中的横竖线删除，从而留下一种新的数学结构。该结构的特点是最大化地保留了图中的信息，同时也更为简明。而如果在其外部以“[ ]”符号包裹，就得到了我们所说的矩阵（在此称为图的邻接矩阵）。有了基本数字形式，接下来的问题是，这种抽象的形式对图有什么意义呢？

2.2　“矩阵特征的另一种解释”——图与矩阵

特征值、特征向量是矩阵固有的重要特征，相关的内容在线性代数课程中属于较为深入的部分。除了在线性方程组求解和二次型中的应用外，它还有什么实际意义呢？下面我们就以图的问题来举例说明。

例　二部图的判定：特征值与邻接矩阵。

二部图（Bipartite Graph）[8]的定义是不存在奇数长度的环路的图。直观地说，二部图中的所有节点应该可被分为2个集合，使得图中所有的边都是介于2个集合之间的。如图1中b）所示，如果记点的集合A={1, 3, 4}、B={2, 5, 6}，显然，图中任意一条边的两端点都是分属于集合A和B的。

一个图是不是二部图？如果是，应该如何划分其

中的点集？这就是所谓的二部图问题。直观地观察，不难发现，节点在图上的分布会直接影响对结果的判断。例如，图1中a）与b）表示的是同一幅图，但显然后者更加容易判定。仅凭肉眼观察，不能确保总能给出正确的答案。特别是，如果图中的点或边很多，仅凭人力完成任务将越来越困难。那么，如果求助于计算机，我们该怎么做呢？

首先可参照前述的方式给出该图的邻接矩阵。接下来，谱图理论[7]中的如下定理将给出答案。

定理　设矩阵$\boldsymbol{M}$为某个图的邻接矩阵，1）如果$\boldsymbol{M}$的最大、最小特征值互为相反数，则该图为二部图；2）点集的分组方式由最小特征值的特征向量决定，特征向量中符号相同的值对应的节点分为一组。

回到前面的例子，对于图1，可求得其邻接矩阵的最大和最小特征值分别为3、−3，因此该图是二部图。又因为−3对应的特征向量为[1，−1，1，1，−1，−1]，因此对应地应该将点1、3、4和2、5、6分别分为一组。而这恰好与通过直观分析得到的结论相符。

这是一个非常简单的例子，其特点是问题非常形象、直观，虽然在计算中用到了求矩阵特征值、特征向量等较为复杂的运算，但如果借助Matlab、Mathematica、Maple等数学软件的帮助，应该不会影响其演示效果的突出和简洁。

2.3　分析与说明

从图的问题引出矩阵概念，是一种新的尝试，它具备如下特点。

2.3.1　从直观对象到抽象概念的直接抽象

图是一种直观、形象的几何对象，将它与矩阵这一抽象概念直接建立联系，对于学生理解矩阵的概念与应用能够产生更为直接的帮助；

2.3.2　课程内容的扩展与深入

从线性方程组出发，通常都是围绕方程组的求解和解的存在性来谈其与矩阵、行列式等概念的关系，无法有效展示特征值、特征向量等较为深入的概念，这样容易给学生造成一种“矩阵只是线性方程组的一种形式化表示”的错觉。而从上面的例子可看到，利用矩阵的谱分析方法，还可直接得出图的一些重要特征，这显然会对学生产生更大的触动。当然，关于图与矩阵的联系远远不止这一例。例如图分割与Lapalacian矩阵[7]的关系，同样适合于作为课程引入的案例使用。

3　几点思考

在实际教学的实施中，能否将新的思路实际加以应用？如果能，应该如何更好地应用？这一思路与传统的思路如何更好地结合？这些都是需要进一步研究和探讨的问题。在此，笔者提出几点想法。

1）以方程组作为主线，把握课程主题。由于线性方程组与矩阵的关系贯穿了整个课程，忽略或淡化方程组与矩阵、行列式的关系显然并不恰当。

2）以图的思路作为补充，扩充学术视野。在简介了线性方程组与矩阵、行列式的关系后，可以使用以上的示例，以另一种方式来建立矩阵的概念，并演示其应用的效果。这样做能够使学生了解，线性代数的课程内容，不仅仅能够被应用在线性方程组中，而是可以有更为广泛、深刻的应用。

3）使用数学软件作为辅助，优化展示过程。由于要使用特征值、特征向量等较复杂的概念，可考虑使用Matlab、Mathematica、Maple等数学软件作为辅助，使计算过程更为简洁、直观，过程更为生动。

4　结语

本文结合代数图论的研究成果，提出一种基于图问题的线性代数课程引入思路。希望能够通过这一新的尝试，对以线性方程组为主的思路进行补充，在扩展学生知识面的同时提升其学习兴趣。具体的实施方法和效果评价还将在教学实践中进一步探索和检验。

参考文献：

[1] 同济大学应用数学系. 线性代数及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社，2005：10.
Department of Applied Mathematics of Tongji University. Linear Algebra and Its Application[M]. Beijing：Higher Education Press，2005：10.

[2] 李忠海，王家骅. 代数课程研究[M]. 北京：科学出版社，2006：8.
Li Zhonghai，Wang Jiahua. Research on Linear Algebra Courses[M]. Beijing：Science Press，2006：8.

[3] Steven J Leon. Linear Algebra with Applications[M]. 7th ed. New York：Pearson Education，2006.

[4] David C Lay. Linear Algebra and Its Applications[M]. 3rd ed. London：Pearson Education，2006.

[5] 冯良贵，戴清平，李　超，等. 线性代数与解析几何[M]. 北京：科学出版社，2008.
Feng Lianggui，Dai Qingping，Li Chao，et al. Linear Algebra and Analytical Geometry[M]. Beijing：Science Press，2008.

[6] Bela Bollobas. Modern Graph Theory[M]. London：Springer，2002.

[7] Chris Godsil，Gordon Royle. Algebraic Graph Theory[M]. London：Springer，2001.

[8] Sanjoy Dasgupta，Christos Papadimitriou，Umesh Vazirani. Algorithm[M]. New York：McGraw-Hill，2008.

（责任编辑：廖友媛）