数值分析课程中算法设计的教学

吴晓勤，熊之光，唐运梅，刘金旺

（湖南科学技术大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201）

摘　要：基于数值分析课程的特点，强调重视算法设计的技术教学，以算法设计的技术教学为纽带，推动学生学习的兴趣，开拓学生视野，活跃学生思维，以此提高学生对该门课程的理解和应用能力，实现数值分析课程教学的目标。

关键词：数值分析；教学改革；算法设计

中图分类号：G642.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)02-0068-04

Teaching of Algorithm Design in Numerical Analysis Curriculum

Wu Xiaoqin，Xiong Zhiguang，Tang Yunmei，Liu Jinwang

（School of Mathematics & Computation Science，Hunan University of Science & Technology，Xiangtan Hunan 411201，China）

Abstract：Based on the characteristics of numerical analysis curriculum，stresses the importance of technical teaching of algorithm design. With algorithm design's technical teaching as a link，promotes students' interests in learning，develops the students' field of vision and brightens students' thinking. Thereby enhances the students' understanding and application capability of numerical analysis curriculum and realizes the teaching goal of this curriculum.

Keywords：numerical analysis; teaching reform; algorithm design

上世纪80年代著名计算物理学家、诺贝尔奖获得者Wilson教授指出，当今，科学活动可分为3种：理论、实验和计算[1]。科学计算已经上升为对科学问题的定量分析起重要作用、与实验研究及理论分析相并列的第三种科学研究方法。随着计算机软硬件的快速发展，特别是计算机图形学的发展，科学计算可视化的程度越来越高；计算机正深刻地影响着人类的行为。数值分析也称计算方法（或称数值计算方法），是科学计算的一门基础课程，是研究用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现。数值分析既具备数学高度抽象性与严密科学性的特点，又更加注重方法和解决实际问题的工程思想，特别注意在方法的精确性和有效性之间平衡。对于数值分析的教学改革，许多学者提出了较多较好的建议，譬如：教材选取；教学内容的取舍；开好头，起好步；加强实践环节的教学和考试；切入Matlab以提高学生学习兴趣等等，具体见参考文献[2-7]。数值分析的教学关键是如何处理好理论和应用，如果太过于强调理论，一是课时不够，二是学生学习兴趣不高；如果太倾向于应用，学生很难知其然，更不用说知其所以然。考虑到数值分析课程的特点及我校学生的实际情况，我们认为在数值分析的教学中，加强算法设计的技术教学，可以比较好地做到两者兼顾。通过算法设计的教学，培养学生学习的兴趣，以兴趣带动理论的学习，使学生掌握科学计算的精髓。我们先从剖析数值分析课程特点入手，再介绍如何进行算法设计的教学。

收稿日期：2009-08-12

基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（08B027），湖南省教育厅研究生教育专项重点基金资助项目（JG2009A017），湖南科技大学科研启动基金资助项目（E58126）

通信作者：吴晓勤（1968-），男，湖南怀化人，湖南科学技术大学副教授，博士，主要研究方向为计算机辅助几何设计，计算机图形学，E-mail: xqwu123@yahoo.com.cn

1　数值分析课程的特点

数值分析研究的对象是数学问题的数值计算方法及其理论，实施计算的工具是计算机，主要任务是算法设计和对算法的理论分析，计算的结果是数学问题的近似解，目标是尽可能获得数学问题的高精度数值解。同时，算法应具有较好的时间复杂性和空间复杂性。数值分析课程的特点可概括如下：

1）内容多、课时少。数值分析的主要内容包括数值计算的误差分析、数值逼近与曲线拟合、线性方程组的求解、非线性方程的求根、数值微分与数值积分、常微分方程及偏微分方程的数值解法等，实际上是数值逼近、数值代数和微分方程数值解 3 门课程的部分内容的综合，具有一定的跨度性。课时相对偏少，理科课时大约 54 学时，工科的课时更少，有 48、40 和 32 学时的。

2）理论要求较高。为了保证计算机能够对数学问题求解，必须要设计一个好的算法，并对每个算法进行相关的理论分析，对近似算法要保证收敛性和数值稳定性、并对误差进行分析；对逼近问题要保证达到要求的精度。不仅涉及到数学方面的课程，如微积分、线性代数、常微分方程等，还涉及到计算机方面的课程，如计算机组成原理、算法分析与设计等。

3）极强的应用性。数值分析是伴随计算机解决实际的应用问题而诞生的。每个算法除了理论上要正确可行外，还要通过数值试验证明是行之有效的。这就要求我们会利用计算机进行编程计算，或利用现成的软件进行计算。无论是自己编程还是利用软件，都对学生的计算机水平提出了较高的要求，一个合格的学生应该学会利用计算机来解决自己所遇到的数值分析问题。

4）思想和方法独特。与其它数学课程不同的是，数值分析有其独特的思想和方法，包括逼近和近似、迭代、离散、外推（松弛）等思想和方法。函数逼近是数值分析方法中的主要内容之一，许多数值方法都依赖于函数逼近的思想，迭代也是数值分析中比较重要的概念，它的基本思想是：要求首先敢于猜测一个解，其次考虑是否满足解的要求，如此反复，直到找到满意解。

2　算法设计技术的教学

王能超在文献[8-9]中对算法设计的技术有专门论述。在教学过程中，强调算法设计技术的教学，可以起到一箭双雕的作用，通过算法设计技术的教学，提高学生学习理论的兴趣，开拓学生视野，活跃学生思维，提高学生对数学的理解和应用能力。主要包括以下 3 种技术。

2.1　缩减技术

缩减技术，全称为规模缩减技术，通过某种简单的运算手续缩减问题的规模，直到得出所求的解。它体现了数值分析中逼近和迭代的思想，是通过“简单的重复”解决复杂问题。在教学过程中，通过渗透缩减技术，帮助学生理解算法的精髓。

以绪论中秦九韶算法具体谈起。对给定的 x 计算下列多项式的值：

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1}$$

将多项式的次数规定为多项式求值问题的规模。如果从式(1)的前 2 项中提出公因子 x^{n-1}，则有

$$P(x)=(a_0x+a_1)x^{n-1}+\sum_{j=2}^{n}a_jx^{n-j},$$

如果算出一次式 $v_1=a_0x+a$ 的值，则所给的计算模型（1）便化为 $n-1$ 次式

$$P(x)=v_1x^{n-1}+\sum_{j=2}^{n}a_jx^{n-j}$$

的计算，从而使问题的规模减少了 1 次。不断地重复这种加工手续，使计算问题规模逐次减 1，则经过 n 步即可将所给多项式次数降为 0，从而获得所求的解。这正是秦九韶算法的全部过程，用算法描述为

$$\begin{cases}v_0=a_0,\\ v_k=v_{k-1}x+a_k,\end{cases} \tag{2}$$

则 v_n 即为所给多项式（1）的值。

缩减技术的特征是：1）结构递归，具有清晰递归结构；2）规模递减，每一步加工后，问题的规模减少了。

显然，解方程和线性方程组的迭代法也是缩减技术，将初始值与真解的距离看作问题的规模，则每迭代一步，得到的值与真值的距离逐步减少，直至达到要求的精度，迭代结束。

如果将包含根的区间作为问题的规模，方程求根的二分法也是一种缩减技术，它是运用某种手续逐步压缩有根区间，减少问题规模，直到所求的根满足精度要求为止。

解线性方程组的消去法也是一种缩减技术。如果线性方程组的系数矩阵为对角阵，那就是解单个方程，可直接解出；如果系数矩阵是上（下）三角阵，利用回代法也可求出；所以解线性方程组的关键是如何把系数矩阵化为上（下）三角阵。在 Gauss 消元法中，每一步是保留其中 1 个方程，将该方程以下的方程的变元个数少 1，可以说是方程组的阶数减 1。如果将方程组阶数定义为方程组求解问题的规模，那么这种消元手续同样是规模缩减技术的具体应用。

再如求特征值的 Jacobi 方法，也用到规模缩减技术，每做一次旋转变换，使特征值问题的规模，即非对角元的平方和 $\tau(A)=\sum_{i\neq j,\, i,j=1}^{n}a_{ij}^2$ 减少，直到平方和足够小，即得到满足精度要求的特征值。

2.2　校正技术

先从数的开方谈起。设给定1个数$a>0$，求$\sqrt{a}$的问题就是要解方程$x^2-a=0$。这是1个非线性的二次方程。计算机只懂得加减乘除四则运算，怎么计算呢？

假设某个预估值x_0，希望用某种简单方法确定校正量Δx，使校正值$x_1=x_0+\Delta x$能够较准确地满足给定方程，即有$(x_0+\Delta x)^2\approx a$。校正量一般为1个小量，为简化计算，舍弃上式中高阶小量$(\Delta x)^2$，而令$x_0^2+2x_0\Delta x=a$。由此我们算出Δx，从而对校正值$x_1=x_0+\Delta x$有$x_1=(x_0+a/x_0)/2$。反复实施这种校正手续，即可导出开方公式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\tag{3}$$

公式（3）实质上是开方的Newton迭代公式。

这种用于计算校正量的简化方程称为校正方程。关于校正方程有2项基本要求：一是逼近性，它与所给方程是近似的。逼近程度越高，所获得的校正量越准确；二是简单性，校正方程越简单，所需计算量越小。求校正量通常采取显示计算。

再来看一看线性方程组的校正技术。

对于给定线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，预估1个初始值$x^0$，由于$\boldsymbol{A}(x^0+\Delta x)=\boldsymbol{A}x^0+\boldsymbol{A}\Delta x$，考察校正方程

$\boldsymbol{A}x^0+\tilde{\boldsymbol{A}}\Delta x=\boldsymbol{b}$，即有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\Delta x=-\boldsymbol{A}x^0+\boldsymbol{b},\tag{4}$$

式中$\tilde{\boldsymbol{A}}$为$\boldsymbol{A}$的某个近似阵，据式（4）解出，$\Delta x=-\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{A}x^0+\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}$，从而改进值$x^1=x^0+\Delta x$为$x^1=(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{A})x^0+\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}$，相应迭代公式为

$$x^{k+1}=(\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{A})x^k+\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{b}。\tag{5}$$

问题的关键是$\tilde{\boldsymbol{A}}$的选取，要求$\tilde{\boldsymbol{A}}$与$\boldsymbol{A}$近似而且方程（4）要比较容易求解。线性方程组的系数矩阵为对角阵或上（下）三角阵，方程都较好求解。这样，进一步将$\boldsymbol{A}$分裂为：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U},\tag{6}$$

其中$\boldsymbol{D}$为对角矩阵，$\boldsymbol{L}$和$\boldsymbol{U}$分别为严格下三角阵和上三角阵。

1）选取$\boldsymbol{D}$作为$\tilde{\boldsymbol{A}}$，此时式（5）有形式：

$$x^{k+1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})x^k+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b},$$

注意到式（6）$\boldsymbol{A}$的形式，上式变为：

$$x^{k+1}=-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})x^k+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b},\tag{7}$$

此即为Jacobi迭代公式。

2）选取$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}$替代$\tilde{\boldsymbol{A}}$，式（5）变为：

$$x^{k+1}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}x^k+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b},\tag{8}$$

此即为Gauss-Seidel迭代公式。

不管方程求根，还是线性方程组求解的迭代法，都较好地体现了校正技术。

2.3　松弛技术

实际计算中，有时获得了目标值F^*的2个相伴随的近似值F_0、F_1，如何将它们加工成更高进度的结果呢？一种简便而有效的办法是，取两者的某种加权平均作为改进，即令

$$\hat{F}=(1-\omega)F_0+\omega F_1=F_0+\omega(F_1-F_0),$$

选取适当的权系数ω来调整校正量$\omega(F_1-F_0)$，以将F_0加工成更高精度$\hat{F}$。这种方法基于校正量的调整与松动，称之为松弛技术。它的设计机理是优劣互补，化粗为精，关键是松弛因子的选取，需要根据具体问题而定。

在数值分析这门课程中，很多地方体现了松弛技术，最典型的是求数值积分的Romberg方法、解线性方程组的超松弛迭代法，还有插值、迭代加速的松弛技术等等。下面以插值和迭代为例给以说明。

多项式插值法主要包括：Lagrang法、逐次线性插值法、Newton法等。逐次线性插值较好地体现了松弛技术。

1）先考察2点插值。设有数据(x_0,y_0),(x_1,y_1)，插值函数为一次式。对2个数据y_0、y_1进行加工，记为

$$y_{01}=(1-\omega_{01})y_0+\omega_{01}y_1=y_0+\omega_{01}(y_1-y_0),$$

为具备插值特性，ω_{01}在$x=x_0$时为1，在$x=x_1$时为0，自然取$\omega_{01}=(x_1-x)/(x_1-x_0)$。类似地，对数据$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$，有：

$$y_{12}=(1-\omega_{12})y_1+\omega_{12}y_2=y_1+\omega_{12}(y_2-y_1),$$

其中$\omega_{12}=(x_2-x)/(x_2-x_1)$。

2）进一步，考察3点插值。将3组数据(x_0,y_0)、(x_1,y_1)、(x_2,y_2)的插值结果记为y_{012}。y_{012}也可按照2点插值法的松弛技术来构造：

$$y_{012}=(1-\omega_{02})y_{01}+\omega_{02}y_{12}=y_{01}+\omega_{02}(y_{12}-y_{01}),$$

因y_{01}、y_{12}分别为0、1两点和1、2两点的插值，ω_{02}只与x_0、x_2有关，取$\omega_{02}=(x_2-x)/(x_2-x_0)$。

一般地，对$n+1$个点列$\{(x_i,y_i)\ i=0,1,\cdots,n\}$逐次线性插值，可以生成$n$次的插值多项式。具体插值表格可参考文献[8，10]。这种逐次插值算法称为Neville算法，此算法较好体现了将复杂过程化为简单过程的重复处理，不同之处在于每一步的松弛因子。如果不是对2个相邻数据使用松弛加工，而是将第一个数据与其它数据逐次松弛加工，则得到Aitken算法。一般的数值分析教材都有介绍，这里就不详述了。

在方程求根中，采用迭代法，只要迭代次数足够多，原则上总可以使求解达到任意精度，但有时迭代过程收敛缓慢，如何使迭代过程加速？可用松弛技术加速收敛。

考察迭代过程中$x_{k+1}=\phi(x_k)$的2个迭代值x_k、x_{k+1}，

将其进行松弛得出解的更好近似值

$$\bar{x} \approx (1-\omega)x_k + \omega x_{k+1},$$

每一步计算分 2 个环节：迭代 $\bar{x}_{k+1} = \phi(x_k)$，松弛 $x_{k+1} = (1-\omega)x_k + \omega\bar{x}_{k+1}$。合并成

$$x_{k+1} = (1-\omega)x_k + \omega\phi(x_k), \tag{9}$$

关键在于松弛因子的选择。从式（9）知，迭代函数为 $\psi(x) = (1-\omega)x + \omega\phi(x)$。为了使其具有平方收敛，对迭代函数求导得 $\psi'(x) = (1-\omega) + \omega\phi'(x)$，只要令对所求根 x^* 成立：

$$0 = \psi'(x^*) = (1-\omega) + \omega\phi'(x^*),$$

因此取松弛因子 $\omega = 1/(1-\phi'(x^*))$。

由于所求根 x^* 未知，用迭代值 x_k 取代 x^* 来计算松弛因子 $\omega_k = 1/(1-\phi'(x_k))$，这样设计的加速公式

$$x_{k+1} = (1-\omega_k)x_k + \omega_k\phi(x_k), \tag{10}$$

在式（10）中 ω_k 需要提供导数值 $\phi'(x_k)$。如果导函数 $\phi'(x)$ 在所考察的范围内变化不大，近似等于某个常数 L，则 $\omega_k = 1/(1-L)$，相应有简化松弛法

$$x_{k+1} = -\frac{L}{1-L}x_k + \frac{1}{1-L}\phi(x_k),$$

为了避开导数信息，用差商替换导数，有：

$$\phi'(x_k) \approx \frac{\phi(\phi(x_k)) - \phi(x_k)}{\phi(x_k) - x_k},$$

这时松弛因子变成：

$$\omega_k = -\frac{\phi(x_k) - x_k}{\phi(\phi(x_k)) - 2\phi(x_k) + x_k},$$

这样构造的松弛法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{[\phi(x_k) - x_k]^2}{\phi(\phi(x_k)) - 2\phi(x_k) + x_k}$$

称作 Aitken 加速方法。

3　结语

针对数值分析课程的特点及我们多年的教学实践，在教学过程中，通过贯彻算法设计的教学，学生普遍感到数值分析课程的学习有“味”了，不是毫无生气的数学公式，而是实实在在的可以解决实际问题的算法。再进一步通过上机验证算法，使学生亲身体验到算法的优劣及如何改进算法等，从而使学生感受到数值分析这门课程的魅力，学生的学习兴趣也就提高了。

参考文献：

[1] 石钟慈，袁亚湘. 奇效的计算[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1998.
Shi Zhongci，Yuan Yaxiang. Effect Computation[M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press，1998.

[2] 杜廷松. 关于《数值分析》课程教学改革研究的综述和思考[J]. 大学数学，2007，23(2)：8-15.
Du Tingsong. Teaching Reform of Numerical Analysis: Overview and Thinking[J]. College Mathematics，2007，23 (2)：8-15.

[3] 谢治州. 数值分析理论及其思维与教学[J]. 黔南民族师范学院学报，2006，9(6)：27-31.
Xie Zhizhou. Theory of Numerical Analysis and Its Thinking and Teaching[J]. Journal of Qiannan Normal College of Nationalities，2006，9(6)：27-31.

[4] 万　中，韩旭里.《数值分析》课程教学的新认识及改革实践[J]. 数学教育学报，2008，17(2)：65-66.
Wan Zhong，Han Xuli. New Viewpoints and Practices for Reforming the Teaching of the Course: Numerical Analysis [J]. Journal of Mathematics Education，2008，17(2)：65-66.

[5] 宋松和，朱建民，唐玲艳，等. 高等数值分析课程教学改革探讨[J]. 高等教育研究学报，2008，31(4)：66-67.
Song Songhe，Zhu Jianmin，Tamg LingYan，et al. Research on Teaching Reform of Advanced Numerical Analysis[J]. Journal of Higher Education Research，2008，31(4)：66-67.

[6] 孙　亮. 数值分析方法课程的特点与思想[J]. 工科数学，2002，18 (1)：84-86.
Shun Liang. Characteristics and Thought of Numerical Analysis Method Curriculum[J]. Journal of Mathematics for Technology，2002，18 (1)：84-86.

[7] 郝亚娟. 数值分析课程教学改革的实践[J]. 教学研究，2007，30(6)：528-530.
Hao Yajuan. Practice in Teaching Reform of Numerical Analysis Course[J]. Research in Teaching，2007，30(6)：528-530.

[8] 王能超. 数值算法设计[M]. 武汉：华中理工大学出版社，1988.
Wang Nengchao. Numerical Algorithm Design[M]. Wuhan：Huazhong University of Science and Technology Press，1988.

[9] 王能超. 计算方法[M]. 北京：高等教育出版社，2005.
Wang Nengchao. Computational Method[M]. Beijing：Higher Education Press，2005.

[10] Ron Goldman. 金字塔算法－曲线曲面几何模型的动态编程处理[M]. 吴宗敏，刘剑平，曹　沅，等，译. 北京：电子工业出版社，2004.
Ron Goldman, Wu Zongmin，Liu Jianping，Cao Yuan，et al. Translated. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling [M]. Beijing：Publishing House of Electronics Industry，2004.

（责任编辑：罗立宇）