符号动力学系统中的相关结论与证明

段晓君，张增辉

（国防科学技术大学 理学院，湖南 长沙 410073）

摘　要：在介绍了符号动力学系统定义的基础上，利用级数和实变函数理论，证明了符号动力学系统中与移位映射相关的距离、周期点稠密性等性质的相关结论。

关键词：符号动力学；周期点；稠密性

中图分类号：N94　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)02-0032-02

The Proofs and Conclusions in Symbolic Dynamic Systems

Duan Xiaojun，Zhang Zenghui

（School of Science，National University of Defense Technology，Changsha 410073，China）

Abstract：Based on the definition of symbolic dynamic system，applies series and real variable theory to prove the related conclusions in symbolic dynamic system，such as properties of the distance of replacement mapping and the denseness of periodic points.

Keywords：symbolic dynamic system；periodic point；denseness

1　符号动力学系统及定义[1]

通过无穷符号序列来刻画动力系统轨道结构的方法，及与之有关的理论，称为符号动力学。

考虑N个符号的集合，如N个数字的集合$S(N)=\{0,1,2,\cdots,N-1\}$。对该集合赋予离散拓扑（即$S(N)$的每个子集都是开集），成为一个拓扑空间。再将其离散化：$\forall a,b\in S(N)$，定义距离

$$\rho(a,b)=|a-b|=\begin{cases}1, & 若 a\neq b;\\ 0, & 若 a=b。\end{cases}$$

可数个这样的空间$S_i=S(N)$的笛卡尔积为：

$$\sum_N=\prod_{i=-\infty}^{+\infty}S_i 或 \sum_N^+=\prod_{i=0}^{+\infty}S_i，$$

称其为符号空间。其元素分别为双边符号序列$\{S(N)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$或单边符号序列$\{S(N)\}_{n=0}^{+\infty}$。

这个符号空间中，由0和1组成的无穷序列集合$\sum_2=\{s=(s_0s_1s_2\cdots)\,|\,s_i=0或1\}$称为关于0和1两个符号的序列空间。定义其中的距离$d(s,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}$，其中，$s=(s_0s_1s_2\cdots)$，$t=(t_0t_1t_2\cdots)$。因为$|s_i-t_i|$的值为0或1，该无穷级数被几何级数$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=2$所控制，因此它是收敛的。而$\sum_2=\{s=(s_0s_1s_2\cdots)\,|\,s_i=0或1\}$在该距离定义之下变为距离空间。

移位映射$\alpha:\sum_2^+\to\sum_2^+$，即由$(s_1s_2s_3\cdots)=\alpha(s_0s_1s_2\cdots)$给出。移位映射简单“忘掉”序列的第一项，把其它元素左移1位。显然移位映射α是$\sum_2^+$上的一一映射。

n周期点定义为重复的序列$s=(s_0s_1s_2\cdots s_{n-1}s_0s_1s_2\cdots s_{n-1}s_0s_1s_2\cdots s_{n-1}\cdots)$。

有些序列经过有限次移位映射后变成重复序列，这样的最终重复序列称为最终周期点。

收稿日期：2009-07-28

基金项目：国防科学技术大学研究生重点建设课程基金资助项目（1151B008）

通信作者：段晓君（1976-），女，江西九江人，国防科学技术大学副教授，博士，主要研究方向为系统分析与评估，数据处理，E-mail：xj_duan@163.com

2　相关结论及证明

结论1　设$s=(s_0s_1s_2\cdots)\in\sum_2^+$，$t=(t_0t_1t_2\cdots)\in\sum_2^+$，且假设$s_i=t_i$，对于$i\le n$，有$d(s,t)\le\frac{1}{2^n}$。反过来，如果$d(s,t)\le\frac{1}{2^n}$，则$s_i=t_i$，对于$i\le n$。

证明　假设$s_i=t_i$，对于$i\le n$，则有

$$d(s,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}\le\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\le\frac{1}{2^n}。$$

相反，若$d(s,t)\le\frac{1}{2^n}$，由于$\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}\le\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\le\frac{1}{2^n}$，且反若存在$i_0\le n$，使得$s_{i_0}\ne t_{i_0}$，则有

$$d(s,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|s_i-t_i|}{2^i}>\frac{1}{2^{i_0}}\ge\frac{1}{2^n},$$

与$d(s,t)\le\frac{1}{2^n}$矛盾。故必有$s_i=t_i$（对于$i\le n$）。

证毕。

结论2　周期点构成序列空间$\sum_2^+$上的稠密子集。

证明　对$\sum_2^+$上的任意一个序列$s=(s_0s_1s_2\cdots)$，$\forall\varepsilon>0$，存在正整数m，使得$\frac{1}{2^{m+1}}<\varepsilon$。取$m+1$周期点$s'$，则$s'=(s_0s_1s_2\cdots s_ms_0s_1s_2\cdots s_ms_0s_1s_2\cdots s_m\cdots)$，其中$s'$的前$m+1$个元素与序列$s$的前$m+1$个元素相同。因此，由命题1的结论，可得$d(s,s')\le\frac{1}{2^{m+1}}<\varepsilon$，这说明周期点构成$\sum_2^+$上的稠密子集。

证毕。

结论3　序列空间$\sum_2^+$的势为$\aleph$，而$\sum_2^+$中周期点和最终周期序列的势为$\aleph_0$。

证明1　考虑序列空间$\sum_2^+$到$[0,1]$上的二进制数的映射f：$f(s)=0.s_0s_1s_2\cdots$，其中$s=(s_0s_1s_2\cdots)\in\sum_2^+$。容易得知$f$为一一映射。

由于$[0,1]$上所有实数的势为$\aleph$[2]，故序列空间$\sum_2^+$的势也为$\aleph$。

另外，由于$\sum_2^+$中周期点和最终周期序列对应着$[0,1]$上的有理数（有理数的小数形式为纯循环小数及混合循环小数），有理数的势为$\aleph_0$[2]，故$\sum_2^+$中周期点和最终周期序列的势也为$\aleph_0$。

证明2　对于序列空间$\sum_2^+$中的序列，每个元素只能取0或1。由排列原理可知，$\sum_2^+$共有$2^{\aleph_0}$个元素。由于$2^{\aleph_0}=\aleph$，故$\sum_2^+$的势为$\aleph$。

对于$\sum_2^+$中周期点和最终周期序列，由排列原理可知，其中共有$\aleph_0$个元素，故$\sum_2^+$中周期点和最终周期序列的势为$\aleph_0$。

证毕。

3　结语

符号动力学是研究实际系统定性性质的一种工具[3]。符号动力学系统中的移位映射是一个特殊映射，研究其性质对分析离散系统的动力学特性非常重要[4]。本文所探讨的这几个结论对于分析离散系统的动力学特性是非常有意义的。如在离散混沌中，Logistic方程实际上就是一个移位映射确定的模型[1,5]。研究其对应的距离特性和周期点的稠密性质等动力学性质可直接得知原系统轨道结构的性质。

参考文献：

[1]　许国志. 系统科学[M]. 上海: 上海科技教育出版社，2000: 101-103.
Xu Guozhi. Systems Science[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Press，2000：101-103.

[2]　郑维行，王声望. 实变函数与泛函分析概要[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，1986：20-30.
Zheng Weixing，Wang Shengwang. Concise Introduction on Real Variables and Functional Analysis Theory[M]. 2nd ed. Beijing：Higher Education Press，1986：20-30.

[3]　Moser J. Stable and Random Motions in Dynamical Systems [M]. Princeton: Princeton University Press，1973.

[4]　Hao Bailin. Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems[M]. Singapore：World Scientific，1989.

[5]　Collet P，Eckmann J P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems[M]. Boston：Birkhauser，1980.

（责任编辑：廖友媛）