第24卷第2期　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　Vol.24 No.2
2010年3月　　Journal of Hunan University of Technology　　Mar. 2010

含参数的 Hardy-Hilbert 型积分不等式的加强

刘如艳，贺乐平

（吉首大学 数学与计算机科学学院，湖南 吉首 416000）

摘　要：利用改进了的Hölder不等式对带参数的Hardy-Hilbert型积分不等式作了进一步的改进，建立了一些新的不等式。

关键词：Hardy-Hilbert型积分不等式；Hölder不等式；权函数；β函数

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)02-0015-03

On Reinforcement of Hardy-Hilbert's Integral Inequality with Parameters

Liu Ruyan，He Leping

（College of Mathematics and Computer Science，Jishou University，Jishou Hunan 416000，China）

Abstract：Some advancement of Hardy-Hilbert's integral inequality are obtained by means of improved of Hölder's inequality and new inequalities are established.

Keywords：Hardy-Hilbert's type integral inequality；Hölder's inequality；Weight function；β function

0　引言

若$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$0<\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left\{\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}，（1）$$

这里常数因子$\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$是最佳值，式（1）称为Hardy-Hilbert积分不等式，它在分析学中有重要的应用。

近几年，通过引入参数λ，r，s和β函数，文献[1-4]给出了Hardy-Hilbert积分不等式如下的一些推广：

若$\lambda>2-\min\{p,q\}$，

$$0<\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty，$$

$$0<\int_0^\infty x^{-\lambda}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty，$$

则有：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\overline{k}_\lambda(p)\left\{\int_0^\infty x^{1-\lambda}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty x^{-\lambda}f^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}，\quad（2）$$

这里常数因子$k_\lambda(p)=B\left(\frac{p+\lambda-2}{p},\frac{q+\lambda-2}{q}\right)$是最佳值。当$\lambda=1$时，式（2）即变为式（1）。

在文献[2]中建立了一个新的Hilbert型积分不等式：设$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$\phi_p,\varphi_q>0$，$\lambda>0$，$\phi_p+\varphi_q=\lambda$，$f,g\geq0$，使

收稿日期：2009-09-24

基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871081）

通信作者：刘如艳（1964-），女（苗族），湖南古丈人，吉首大学副教授，主要研究实函数及应用；
贺乐平（1965-），男，湖南娄底人，吉首大学教授，主要研究特殊函数论及应用，E-mail：jdlepinghe@163.com

$$0<\int_0^\infty x^{p(1-\phi_p)-1}f^p(x)\,\mathrm{d}x<\infty,$$

$$0<\int_0^\infty x^{q(1-\varphi_q)-1}g^q(x)\,\mathrm{d}x<\infty,$$

则有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}\left\{\int_0^\infty x^{p(1-\phi_p)-1}f^p(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty x^{q(1-\varphi_q)-1}g^q(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}},\qquad(3)$$

这里，常数因子$\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}$是最佳值。

本文的目的是利用改进的Hölder不等式对式（3）进行加强，从而建立一些新的不等式。

1　引理及其证明

为方便起见，先介绍一些符号：

$$(f^r\cdot g^s)=\int_0^\infty f^r(x)g^s(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_p=\left(\int_0^\infty f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},\ \|f\|_2=\|f\|,$$

另外，定义函数$S_p(H,x)=\left(H^{\frac{p}{2}},x\right)\|H\|_p^{-\frac{p}{2}}$，其中$x$是单位参数变量，在通常情况下适当选取$x$可使要讨论的问题得以简化。特别地，当$H^{\frac{p}{2}}$与$x$正交时，$S_p(H,x)=0$。在本文中，用$k$表示$\min\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right\}$。

引理1　设$f(x),g(x)>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且$p>1$。如果$0<\|f\|_p<+\infty,0<\|g\|_q<+\infty$，那么：

$$(f,g)<\|f\|_p\|g\|_q(1-R)^k,\qquad(4)$$

其中$R=\left(S_p(f,h)-S_q(g,h)\right)^2<1$，$\|h\|=1$，且$f^{\frac{p}{2}}(x)$，$g^{\frac{q}{2}}(x)$，$h(x)$线性无关。

证明　1）考虑$p\neq q$的情形。不失一般性，设$p>q>1$，因$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，所以有$p>2$。令$A=\frac{p}{2}$，$B=\frac{p}{p-2}$，则有$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=1$。由Hölder不等式，得到：

$$(f,g)=\int_0^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(f\cdot g^{\frac{q}{p}}\right)g^{1-\frac{q}{p}}\mathrm{d}x\le$$

$$\left[\int_0^\infty\left(f\cdot g^{\frac{q}{p}}\right)^A\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{A}}\left[\int_0^\infty\left(g^{1-\frac{q}{p}}\right)^B\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{B}}=$$

$$\left(f^{\frac{p}{2}},g^{\frac{q}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}\|g\|_q^{q\left(1-\frac{2}{p}\right)},\qquad(5)$$

式（5）取等号当且仅当$f^{\frac{p}{2}}$和$g^{\frac{q}{2}}$线性相关，事实上式（5）中等号成立当且仅当存在C_1使$\left(f\cdot g^{\frac{q}{p}}\right)^A=C_1\left(g^{1-\frac{q}{p}}\right)^B$，容易算出$f^{\frac{p}{2}}=C_1g^{\frac{q}{2}}$。

在文献[3]中，利用Gram矩阵的正定性建立了下列重要的不等式：

$$(\alpha,\beta)^2\le\|\alpha\|^2\|\beta\|^2-\left(\|\alpha\|x-\|\beta\|y\right)^2=$$

$$\|\alpha\|^2\|\beta\|^2\left(1-\bar{r}\right),\qquad(6)$$

其中：$\bar{r}=\left(\frac{y}{\|\alpha\|}-\frac{x}{\|\beta\|}\right)^2$；

$x=(\beta,r)$，$y=(\alpha,r)$，且$\|r\|=1$，$xy>0$。

式（6）中的等号成立当且仅当α与β线性相关，或者r是α和β的线性组合，且$xy=0$，但$x\neq y$。如果式（6）中的α,β，r分别用$f^{\frac{p}{2}},g^{\frac{q}{2}}$和$h$代替，那么就可得到：

$$\left(f^{\frac{p}{2}},g^{\frac{q}{2}}\right)^2\le\|f\|_p^p\|g\|_q^q(1-R),\qquad(7)$$

其中：$R=\left(S_p(f,h)-S_q(g,h)\right)^2$且$\|h\|=1$。

式（7）中等号成立当且仅当$f^{\frac{p}{2}},g^{\frac{q}{2}}$线性相关，或者$h$是$f^{\frac{p}{2}}$和$g^{\frac{q}{2}}$的线性组合，且$\left(f^{\frac{p}{2}},h\right)\left(g^{\frac{q}{2}},h\right)=0$，但$\left(f^{\frac{p}{2}},h\right)\neq\left(g^{\frac{q}{2}},h\right)$。因为$f^{\frac{p}{2}}$与$g^{\frac{q}{2}}$线性无关，所以式（7）中不能取等号。将式（7）代入式（5）后，化简可得：

$$(f,g)<\|f\|_p\|g\|_q(1-R)^{\frac{1}{p}},\qquad(8)$$

只要适当地选取$h(x)$，就可使$R\neq0$。（关于$h(x)$的选取有很大的灵活性，它只要满足条件$\|h\|=1$就行，具体选法可参看文献[3-4]等），注意到p与q的对称性，因此不等式（4）成立。

2）考虑$p=q$的情形。根据假设，f、g和h线性无关，再由式（6）可得下列不等式：

$$(f,g)<\|f\|\|g\|\left(1-\bar{r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中$\bar{r}=\left(\frac{(f,h)}{\|f\|}-\frac{(g,h)}{\|g\|}\right)^2$，且$\|h\|=1$。

下面证明不等式$R<1$。由Cauchy不等式，不等式中等号成立当且仅当f与g线性相关，从而有：

$$\left(H^{\frac{p}{2}},x\right)<\left\|H^{\frac{p}{2}}\right\|\|x\|=\|H\|_p^{\frac{p}{2}}\quad(\|x\|=1),$$

因此 $0 < S_r(H,x) = \left(H^{\frac{r}{2}}, x\right)\|H\|_r^{-\frac{r}{2}} \le 1$，即得 $0 < S_p(f,h) \le 1$，因 $f^{\frac{p}{2}}(x)$ 和 $h(x)$ 线性无关，上式不等号成立，则有 $0 < S_p(f,h) < 1$。

同理可得 $0 < S_q(g,h) < 1$，因此，

$R = \left(S_p(f,h) - S_q(g,h)\right)^2 < 1$。

引理1得证。

注 式（4）为Hölder不等式的改进。

引理2 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\phi_p,\varphi_q>0$, $\lambda>0$, $\phi_p+\varphi_q=\lambda$，定义权函数

$$\omega_\lambda(p,x)=\int_0^\infty \frac{1}{\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\cdot\frac{x^{(p-1)(1-\phi_p)}}{y^{1-\varphi_q}}\mathrm{d}y \quad \left(x\in(0,\infty)\right).$$

则有等式

$$\omega_\lambda(p,x)=\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}x^{p(1-\phi_p)-1} \quad \left(x\in(0,\infty)\right), \tag{9}$$

$$\omega_\lambda(q,y)=\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}y^{q(1-\varphi_q)-1}, \tag{10}$$

证明过程参见文献[2]。

2 主要结果

为方便起见，再引入一些符号：

$$F_\lambda=\frac{1}{\left(\max\{x^\lambda,y^\lambda\}\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{x^{(1-\phi_p)/q}}{y^{(1-\varphi_q)/p}}f(x),$$

$$G_\lambda=\frac{1}{\left(\max\{x^\lambda,y^\lambda\}\right)^{\frac{1}{q}}}\cdot\frac{y^{(1-\varphi_q)/p}}{x^{(1-\phi_p)/q}}g(y),$$

$$S_p(F_\lambda,h)=\left(\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty F_\lambda^{\frac{p}{2}}h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\cdot\left\{\int_0^\infty x^{p(1-\phi_p)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$S_q(G_\lambda,h)=\left(\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty G_\lambda^{\frac{q}{2}}h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\cdot\left\{\int_0^\infty y^{q(1-\varphi_q)-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{-\frac{1}{2}}。$$

定理1 设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\phi_p,\varphi_q>0$, $\lambda>0$, $\phi_p+\varphi_q=\lambda$, $f,g\ge 0$，使

$0<\int_0^\infty x^{p(1-\phi_p)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$,

$0<\int_0^\infty x^{q(1-\varphi_q)-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}\left\{\int_0^\infty x^{p(1-\phi_p)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_0^\infty x^{q(1-\varphi_q)-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}(1-R_\lambda)^k, \tag{11}$$

其中：

$$R_\lambda=\left(S_p(F_\lambda,h)-S_q(G_\lambda,h)\right)^2 \quad h(x,y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-x}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{4}}。 \tag{12}$$

证明 由引理1及引理2有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(x)g(y)}{\max\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty\int_0^\infty F_\lambda G_\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty F_\lambda^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty G_\lambda^q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}(1-R_\lambda)^k=$$

$$\left\{\int_0^\infty\omega_\lambda(p,x)f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_0^\infty\omega_\lambda(q,y)g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}(1-R_\lambda)^k=$$

$$\frac{\lambda}{\phi_p\varphi_q}\left\{\int_0^\infty x^{p(1-\phi_p)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_0^\infty x^{q(1-\varphi_q)-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}(1-R_\lambda)^k,$$

即式（11）成立。

下面讨论 R_λ 的表达式：选取由式（12）所定义的函数 $h(x,y)$，

$$\|h\|=\left(\int_0^\infty\int_0^\infty h^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-2s}\mathrm{d}s\int_0^\infty\frac{1}{s+t}\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=1,$$

由引理1，有

$$R_\lambda=\left\{\left(F_\lambda^{\frac{p}{2}},h\right)\|F_\lambda\|_p^{-\frac{p}{2}}-\left(G_\lambda^{\frac{q}{2}},h\right)\|G_\lambda\|_q^{-\frac{q}{2}}\right\}^2=$$

$$\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty F_\lambda^{\frac{p}{2}}h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left[\int_0^\infty\int_0^\infty F_\lambda^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^2-$$

$$\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty G_\lambda^{\frac{q}{2}}h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\left[\int_0^\infty\int_0^\infty G_\lambda^q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^2,$$

（下转第46页）